数学教学

2005年第5期

目　　录

平面几何教学的回顾与前瞻*

张奠宙

古希腊的数学, 以几何学为中心. 欧几里得的《几何原本》, 可以说集古希腊几何学之大成, 甚至可以说是古希腊整个数学的总结. 文艺复兴之后, 代数登堂入室, 笛卡儿借用代数方法创立了坐标几何, 并以微积分的辉煌成就取代几何学成为数学的中心. 进入20世纪下半叶, 计算机出现了. 信息时代的一切都在数字化, 人类对几何学的认识发生了改变. 一方面, "几何学万岁"的口号, 显示了人们对几何学的热爱和重视. 另一方面, 几何学进一步代数化. 学校中欧氏几何教学内容被一再缩减. 于是, 几何教学成为当代教育改革的一个核心课题.

第一节 国际视野: 几何教学内容的变迁

一直到19世纪中叶, 欧几里得的《几何原本》始终是中学里的主要教材. 1900年, 英国培利(Perry, 1850–1920)发动了数学教育改革运动, 矛头指向欧几里得的《几何原本》. 培利说: "我们再也没有欧几里得时代那样多的空闲时间了".

此后, 中学里的几何课本, 都根据《几何原本》的思想重新编写, 比较容易懂. 例如, 1919年五四运动之后, 在中国比较通行的有《三S平面几何》、《温德华氏平面几何》等等.

20世纪60年代, 法国布尔巴基学派的元老, "新数"运动的精神领袖、著名数学家狄多内(J. Dieudonne, 1906–1992)发出了"逐客令", 提出了"欧几里得滚蛋(Euclid must go!)"的口号(1959). 他认为"欧几里得几何是以落后于时代的方法和思维方式所堆砌的一堆遗物", "对现代的数学工作者来说, 只不过像供消遣的幻方和国际象棋一样". 因此, 他认为"作为一门科学来说, 欧几里得几何已经死了".

与此同时, 东方的中国也出现"打倒欧家店"的提法, 以此作为数学教育改革的目标之一(1960).

1980年, 新数学运动宣布失败, 提出的新口号是"回到基础". 美国的一项报告, 典型地表现了人们对取消几何的焦虑.

"在美国全体中学生里, 47% 不学几何; 6% 虽然学几何但中途退出; 7% 学习'不加证明'的几何, 学证明但根本不会证明; 9% 只会一般的证明; 7% 取得中等水平的成功; 13% 能顺利地完成证明"(Usiskin, 1982).

"欧几里得从学校里消失了! 在一次调查中, 初中一年级和二年级学生都不知道欧几里得. 82名初三学生只有一个人说得出欧几里得的事情. 要知道, 数学课本中有一页介绍, 他们本来应该知道的."(日本, 横地清, 1988).

"在新数学运动之后, 几何已经呈现衰退趋势, 此后讲授的几何就更少了. 定理的证明不再作为要求. …… 回到基础的运动并没有使得取消过的几何得以恢复." (新加坡, 李秉彝等, 1986).

几何教学为什么会落到这步田地? 原因在于社会环境对几何教学是不利的. 第一, 中学数学受大学数学影响. 分析和代数在大学课程中占主要地位, 而几何课很少. 第二, 企业和商业越来越依赖于统计、运筹学和数值分析. 要适合中学生就业需要, 就得多教些统计, 于是就挤掉了几何课程. 第三, 最大的威胁来自于计算机科学. 离散数学、算法的新要求使得课程设计者不得不削减几何方面的要求. 计算机只"懂"代数, 不"懂"几何, 更促使几何的代数

*本文是《中学代数研究》中的一章的三节. 该书将由高等教育出版社出版.

化. 形势不利于欧几里得几何的恢复, 更不要说发展了.

当今几何学的现状是将托姆和狄多内两种极端观点进行折中. 例如采取直观几何, 度量几何, 到论证几何的三步曲, 将原来欧氏几何的内容加以分割, 进行螺旋式组合. 尽管这远非昔日的"欧氏演绎体系", 但还是相对集中地保留了欧氏几何的某些内容.

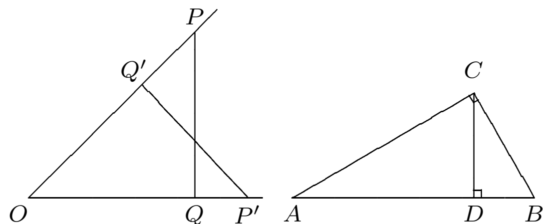
另一种处理方法是变换几何. 过去人们总习惯把变换几何与欧氏几何对立起来. 现在已找到一种两全其美的方案. "对顶角相等"、"平行线的同位角相等"等都可以用图形旋转和平移的方法加以证明. 勾股定理也基于对称和投影变换来得出(见本节附录). 此外, 向量几何的发展, 使原来的坐标式的解析几何获得了新的面貌. 这符合代数化的趋势.

附录　　用投影法证明勾股定理

(1985年法国国民教育部数学教育委员会执行主席马蒂内(Martinet)访华讲演时提到)

命题　已知锐角O, 从一边上任何点P向另一边作投影, 垂足为Q, $OQ=\alpha\cdot OP$, $0<\alpha<1$. 则从另一边上任何点P'向该边作投影(垂足为Q'), 必将有$OP'=\alpha\cdot OQ'$.

证明　先用相似三角形定义解决点P的任意性问题, 即α不因点P的不同而改变, 然后将角O作角平分线用对称观点说明P可变为P', Q可变为P', 因而α不变.



现在证明勾股定理.

由命题, 在角A中, $AC=\alpha AB$, $AD=\alpha AC$, 故$AD=\alpha^2AB$,

在角B中, $BC=\beta AB$, $DB=\beta BC$, 故$DB=\beta^2AB$.

但$AB=AD+DB=\alpha^2AB+\beta^2AB=(\alpha^2+\beta^2)AB$, 故$\alpha^2+\beta^2=1$. 于是从$AC^2=\alpha^2AB^2$, $BC^2=\beta^2AB^2$立知$AC^2+BC^2=(\alpha^2+\beta^2)AB^2=AB^2$. 证毕.

(此证法运用投影、对称等动态观点处理直角三角形的各边关系, 别具一格)

第二节　半个世纪以来的中国平面几何教学

1607年, 明末的徐光启和利玛窦合作翻译了《几何原本》, 将拉丁文的Geometria的"Geo"音译为"几何", 一直沿用至今. 但是, 这部著作并没有引起当时知识界的重视. 真正将几何学作为中小学课程的内容, 是在辛亥革命之后, 特别是1919年的五四运动之后.

1949年以前, 几何教学的分量很重. 平面几何的论证要求很高, 习题相当难. 例如, 九点圆、西摩松线之类的问题, 会出现在初中毕业考试中间, 学生不得不记住这些证明.

1950年代, 中国全面学习苏联. 平面几何教材苏联化, 主要采用吉西略夫编写的《几何》教材的体系. 先是翻译, 后来加以改写, 体系未变. 苏联教材着重"函数"思想, 对几何学的公理化体系十分重视, 论证也非常严密, 但是总体内容减少了, 诸如九点圆之类的问题不再出现在教材之中, 例题和练习题的难度也不高. 这是一个明显的进步.

文革十年, 几何学被"划线"、"度量"等实用性内容所取代. 1976年之后, 迅速恢复到1960年代的水平. 整个1980年代的几何教学, 并没有太大的变化.

1990年使用的数学教学大纲, 平面几何的内容共有198课时. 其中初中二年级102课时, 每周3小时; 初三96课时, 也是每周3课时. 内容仍然中规中矩. 其中有平行公理, 尺规作图, 平行线分线段成比例定理, 线段的内、外分点, 三角形的内心、外心, 两圆的公切线, 相交弦定理, 切割线定理, 四种命题, 反证法, 轨迹等典型的欧氏几何特征.

到了1992年, 平行公理淡化了, 在大纲中没有出现. 轨迹、反证法、弦切角定理、切割线定理等都打上了星号. 尺规作图改成了基本作图. 此后, 几何内容逐渐减少. 到了2000年, 由

于实行5天工作制, 学校的课时大幅度缩减, 人民教育出版社出版的数学教学大纲中, 平面几何的内容和要求进一步降低. 但是, 仍然保留了原有的论证几何的体系.

1980年代末, 上海开始进行地方性的课程改革. 其中数学课程中的平面几何部分, 实行"实验几何"与"论证几何"的两个循环. 初中二年级, 先通过观察、操作获得几何知识, 然后在初三进行严格论证. 论证的要求自然有所降低. 但是, 论证几何的总体要求没有改变.

可以说, 直到2000年, 中国仍是平面几何教学水平最高的国家之一. 就在这一年, 国家启动新一轮的课程改革. 数学课程首当其冲. 2001年7月率先推出《九年义务教育数学课程标准(实验稿)》, 并且立即在一些实验区使用, 以后迅速推广. 到了2004年, 使用数学新编教材的实验区已经覆盖了全国90%以上的县.

《九年义务教育数学课程标准(实验稿)》(以下简称"新课标")对几何的处理意见是:

• 国家实行九年义务教育制度, 以前精英教育采用的几何体系应该彻底改革. 重点是丰富对空间图形的认识和感受, 不再从整体上维持平面几何的公理化演绎体系.

• 据调查, 多数初中学生不能够理解"公理化"的几何思想. 几何学必须贴近学生的日常生活实际.

• 注重学生经历观察、操作、推理、想象等探索过程. 欣赏并体验变换在现实生活中的广泛应用. 尽量使用"量一量、做一做"等操作性的活动. 例如, 三角形内角和为180°, 是通过量、拼等方法得到的.

• 注重对证明本身的理解, 而不追求证明的数量和技巧. 新课标规定只证明8组命题, 而且练习和考试与证明有关的题目难度, 要和这8组命题的论证难度相当.

"新课标"发表以后, 立即编写教科书, 迅速推广. 推广过程中, 据教育部有关的资料, 受到大多数数学教师的欢迎. 到2005年已经覆盖90%的县市. 在此期间, 有许多赞成的意见, 也有许多批评的意见[1]. 归纳起来, 有以下几点:

• 基础数学是人类文明中的核心部分. 中学数学教育应该担负起理性文明、科学启蒙的使命. 现在, 削弱平面几何的演绎体系, 降低中学数学教育的水准, 和我国教育发展方向背道而驰.

• 数学贴近生活不能过头. 几何学很多问题是理性思维的问题, 并不和生活有多大联系.

• 新课标忽视演绎推理, 把证明都改成说理. 不能看一看、量一量就算得到真理. 老是"量", 就倒退到尼罗河时代去了.

• 培养理性思维需要载体, 几何是最好的载体. 新课标说要讲什么是证明, 却只能讲8组命题. 但是培养几何的推理能力需要学生"做"推理. 光讲什么是命题, 什么是推理, 什么是证明是学不会的.

• 几何学是一个体系, 支解成一段段的知识是不行的. 减轻负担要精中求简, 不能随意砍掉.

关于平面几何教学的争论还在继续之中. 真理越辩越明, 争论有利改革. 数学教学的改革需要稳步进行.

那么, 中国学生能不能学会平面几何呢? 这里, 让我们引用1997年发表的一次调查[2]的结果:

"代数得分率高于几何得分率, 且差异显著($\mu = 16.60, t < 0.01$). 但一个有趣的现象是几何满分人数(2003人)反而比代数满分人数(1424人)多.

学生的代数成绩比几何成绩高. 解答题上学生代数和几何的得分率几乎是一样的, 但在基本题的得分率上两者却有很大差异, 代数成绩比几何成绩好. 其原因在于学生解答几何基本题上表现较差, 而对代数基本知识和基本技能的掌握较好."

这一结论表明, 对初中学生来说, 首先是几何比代数难学, 许多学生连"基本题"也做不好; 其次是"两极分化", 优秀学生喜欢几何, 几何满分的人数比代数满分的人数多.

看来, 几何对许多学生来说的确很难, 应当减轻他们的负担. 但是许多优秀学生能够学会几何, 而且学得不错. 因此, 不同的人学习不

同的几何, 恐怕是我们应当做的事.

第三节　平面几何教学如何培养理性思维

半个世纪以来, 中国的平面几何教学积累许多成功的经验, 可以说是中国现代教育的宝贵财富之一.

一、关于平面几何入门教学.

为了使大多数初中学生学会平面几何的内容, 帮助学生顺利地完成从直观、操作性数学学习转向理性思维、演绎推理、证明性学习的过渡, 中国的数学教育工作者在平面几何入门教学上下了很大功夫,这是一个重要的创造,值得继承. 基本经验如下:

首先要引导学生突破概念关. 在平面几何开始部分中有20多个重要概念, 需要从直观出发, 形成抽象的认识. 特别是要求将这些概念从自然语言,转到严格的数学语言加以表述. 例如, 角的概念, 人们早已建立. 但是, 作为数学的表述, 就比较严密, 而且还有动态和静态的两种定义. 此外直线、线段、射线三个概念之间, 既有区别也有联系. 需要注意辨别.

其次, 要注意引导学生突破几何语言关. 几何语言比较规范、严谨, 按其叙述方法又可分为文字语言和符号语言, 按用途可分为描述性语言, 推理语言和作图语言. 对于文字语言, 教学中应力求生动、形象、准确. 通过教者示范, 强调阅读教材, 通过几何图形以及反例等予以强化, 使其掌握"所有"、"凡"、"延长"、"连接"、"截取"、"对应"、"相似"、"相等"、"在 ··· 之上"等述语的用法. 符号语言是推理论证的基础, 教学中要引导学生将概念符号化, 通过范句、范式、范词养成使用的规范化, 并进行文字语言和符号语言互释、互译的练习.

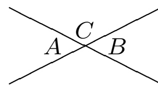
第三, 要注意引导学生突破图形关. 要教会学生具体的画图方法与技巧. 适当地画出几何图形, 如任意三角形不可画成等腰三角形, 等腰三角形不可画成等边三角形. 分清实线、虚线的用法, 更重要的是要培养学生具有一定的看图、识图能力. 例如, 在图形中能分清有几个角, 有多少个三角形等等.

第四, 培养学生的逻辑推理能力. 一步步地帮助学生对照图形, 分清已知条件和未知条件. 正确写出已知、求证. 学会引用定理, 说明理由. 分清命题结构, 掌握一定的书写格式. 在寻求思路的基础上, 运用"三段论"进行论证. 学会添置辅助线.

二、简单的推理证明中, 加强理性思维的重要性阐述.

几何教学的目的是培养理性思维精神, 应该从简单的推理时就不断地孕育、渗透、阐述. 不要只要求证定理、做题目, 却不知道为什么要这么做. 如同"猪八戒吃人参果", 吞到肚里还不知道滋味. 一些优秀的教师就能够注意阐发古希腊的理性思维的伟大精神价值. 几何内容削减以后, 在一些最基本的推理中加强思维培养, 是可取的一种方法. 举例如下.

最简单的几何命题是"对顶角相等". 如图, 两条直线相交, 那么角A等于角B. 产生的问题是, 这样简单的问题, 究竟要不要证明?



这个结果一眼就看出来了! 这还要证明吗? 那不是自找麻烦吗?

在世界名著、欧几里得编写的《几何原本》中, "对顶角相等"是命题15. 证明如下: $A+C$是平角, $B+C$也是平角, 然后根据公理3("等量减等量, 其差相等"), 所以$A=B$.

这里, 重要的价值不在"对顶角相等"的命题本身, 而在于如何确定一个结论的真理性. 几何学是人类不凭直观和实验, 运用逻辑证明真理的典范.

中国古代数学没有对顶角相等这样的定理, 古希腊为什么会有? 这可以从文化层面进行分析. 追求真理是人类永远的目标. 如何判断一个命题是真理, 不同的人在不同的文化影响下, 会有不同的答案.

古希腊是奴隶制国家. 当时希腊的雅典城邦实行奴隶主民主政治. 由男性公民组成的民众大会有权制定法律, 处理财产、祭祀、军事等问题(注意: 广大的奴隶、妇女、外来人不能享受民主权利). 奴隶主的民主政治和皇帝君王

独裁的政治是有所区别的. 古希腊的奴隶主民主政治往往需要用理由说服对方, 于是学术上的辩论风气较浓. 为了证明自己坚持的是真理, 就需要证明. 于是, 古希腊的学术, 不仅要解决真理"是什么 (What)"的问题, 还要回答"为什么 (Why)"的问题, "唯理论"的学术风气很盛.

中国在春秋战国时期也有百家争鸣的学术风气, 但是没有实行古希腊统治者之间的民主政治, 而是实行君王统治制度. 春秋战国时期的百家争鸣, 固然是知识分子自由表达见解的黄金年代, 但是, 其核心课题是帮助君王统治臣民、管理国家. 在这样的环境下, 中国的古代数学, 多半以"管理数学"的形式出现, 目的是为了丈量田亩、兴修水利、分配劳力、计算税收、运输粮食等国家管理的实用目标. 理性探讨在这里退居其次.

三、精中求简, 保持平面几何的完整体系.

中学里平面几何的公理体系, 当然不能使用极端严密的希尔伯特公理体系, 也不可能使用原始的欧氏几何体系. 公理可以多一些, 起点高一些. 比如, 三角形全等的判别法也可当作公理来陈述. 几何学的内容可以适当减少. 但是, 无论如何, 在整体上应该保留一个演绎的系统. 学习的过程可以是: 直观感知——操作确认——演绎论证——代数计算. 结论可以由直观和实验方法进行猜想, 但最终必须经过证明, 由已知推出未知. 推理的严密程度随年龄而增加. 证明可用说理的方法(如使用图形运动变换的语言), 也可用三段论的逻辑方法. 这在我国已经进行了多年的实验,可进一步总结.

四、分清几何的基本要求和较高要求, 不搞一刀切.

由于时代的进步, 实行5天工作制, 学时数大量减少. 同时, 未来公民所需要学习的知识却在不断膨胀、甚至爆炸. 古希腊把几何学作为高级知识分子学习的内容. 今天的几何教育, 则是为大众服务的. 我们只能在有限的时间内让学生掌握平面几何体系的精髓. 因此, 在义务教育阶段, 21世纪中学平面几何内容一定会比20世纪的要少些. 删节一些内容势在必行. 不然的话, "一万年以后怎么办?".

如上所述, 对所有未来公民实行的几何教育, 主要是体会、了解理性思维的价值, 提高思维水平. 但是, 平面几何的价值不仅如此. 一部分将来从事科学研究的知识分子, 管理国家的决策人员, 需要从事创造性工作的各行各业的精英, 需要学习更多的平面几何知识. 他们应该学得更加系统、更加深入, 对公理化思想有更深的体会, 对于添加辅助线使得难题证明豁然开朗的"美妙体验", 具有真实的感受. 因此, 不同的人学习不同的几何. 在高中数学课程标准里, 设置"平面几何"的选修课, 是一个不错的选择.

参考文献

[1] 李大潜. 对中学数学教育的一些意见. 数学教学. 2003年第一期.

[2] 谢安邦、谈松华. 全国义务教育学生质量调查与研究. 华东师大出版社. 1997. P.238.

资料一 范·希尔的6个几何思维水平*

西方学者对儿童的几何思维进行了许多研究. 其中以 Pierre van Hiele、Dina van Hiele 夫妇的研究最著称. 他们两人提出了几何思维水平的分析. 起先提出了5种水平, 后来又改为3种水平. 一般认为还是5种水平更细致、更确切. 在范·希尔提出水平1–5之后, 其他研究者又补充了一个更低的水平: 水平0. 这可以帮助我们进行几何课程的设计和教学. 以下分别做一些介绍.

水平0: 前认知水平. 只能注意直观形状的某一些特征. 例如可以区分正方形和圆, 却不能区分正方形和三角形. 在这个水平, 学生

*本资料摘自格劳斯主编的《数学的教与学手册》. 陈昌平等译. 上海教育出版社. 1999年. 第498、505、530页.

推理的对象是具体的形象或者触觉的刺激, 其结果是能够识别一些“相同的形状”.

水平1: 直观化. 学生按照外观来识别和操作形状和另外一些几何图形. 他们能在心理上把这些图形表示为直观图象. 例如, 学生说所给的图形是矩形, 是因为它“看起来像门”. 然而, 他们不关心几何性质或所表示图形种类的特征化. 也就是说, 尽管图形的性质决定图形, 而这个水平的学生却未意识到图形的性质. 在这个水平上, 学生的推理为知觉所主宰. 他们尽管不能说出图形的简单性质, 却也能把一个图形与另一个图形相区别; 或者由于两个图形看起来相同. 他们就判断这两个图形全等: “看起来就是如此, 没有什么原因”.

在直观化水平, 学生推理的对象是按直观上“形状相同”来确认图形分类的. 例如, 陈述“这个图形是菱形”时, 这个学生的意思是“这个图形有我已学过的称作‘菱形’的形状”.

水平2: 描述 / 分析. 到了第2水平, 学生通过图形的性质来识别图形并能确定图形的特征. 例如. 一个学生可能认为菱形是四条边相等的图形; 因此, 术语“菱形”指的是“他已学过的所谓‘菱形’性质”的一个集合. 通过观察、测量、画图和建模等手段经验地建立了性质. 学生发现某些性质的组合标志着一类图形, 而有些图形却不这样; 因而播下了几何含意的种子. 然而这个水平的学生看不出两类图形之间的关系(例如, 一个学生可能会满足于一个图形因为它是正方形, 所以不是长方形).

在这个水平, 学生推理的对象是图形的分类, 用那些与自己相一致的图形性质在思考, 这种推理的产物是建立起图形间关系、图形性质的顺序和图形的分类.

水平3: 抽象 / 关联. 在水平3, 学生能形成抽象的定义. 区分概念的必要条件和充分条件; 能理解几何领域的逻辑论证, 有时甚至能提出这样的论证. 他们能分层次将图形分类(通过排出图形性质的顺序)并给出判别它们类别的非形式化论证, 例如, 一个正方形被识别属菱形, 因为可以将它考虑为一个“具有某些外部性质的菱形”. 利用非形式化推导, 他们能发现图形分类的性质. 例如, 由于任何四边形可被重组成两个三角形, 而每一个三角形的内角和是180°. 他们能推导任何四边形的内角和一定是360°.

随着学生发现不同形状的性质, 他们觉得有组织这些性质的需要. 思想的这种逻辑组织是正确推理的首要表现形式. 然而, 学生仍不理解逻辑推理是建立几何真理的方法.

在这个水平, 学生推理的对象是图形分类性质. “整理图形性质, 假如图形满足四条边相等的四边形, 将知道这个图形是菱形”. 这种推理的产物是通过图形性质的交互联系, 获得的思想进行了重组.

水平4: 形式推理. 达到水平4时, 学生在公理化系统中建立定理. 他们识别未定义术语、定义、公理和定理之间的差异. 他们能构造原始的证明; 也就是说, 他们可以作出一系列陈述, 对作为“已知条件”的结果的一个结论作逻辑判断.

在这个水平, 通过逻辑解释像公理、定义和定理的几何陈述. 学生能进行形式推理. 推理的对象是图形分类性质的关系, 推理的产物是建立亚序关系——关系之间的关系——并在一个几何系统中用逻辑链来表述.

水平5: 严密性 / 元数学. 在第5水平, 学生在数学系统中进行形式推理. 即便没有参照模型, 他们也能研究几何, 而且还能通过形式化地操作如公理、定义、定理等几何陈述进行推理. 推理的对象是形式化构造间的关系. 他们推理的产物是几何公理系统的建立, 及其详尽阐述与比较.

范·希尔水平准确地描述了学生的几何思维吗? 一般而言, 来自美国和国外的经验研究已证实范·希尔水平在描述学生从小学到中学的几何概念发展方面是有用的. 例如, 尤西斯金发现大约75%的中学生适用于范·希尔模式. 苏联的一项研究表明, 高中毕业时, 几乎40%的学生仍然停留在水平2.

中国还没有类似的报告.

资料二　　几何教学体系的类型*

1995年9月在意大利的卡塔尼亚大学曾召开"21世纪几何教学展望"国际研讨会, 我国张福生、唐盛昌同志参加会议, 当时在本刊1996年第2期作了报道. 以下是报道中的一节.

我们从会议上了解到, 国际上几何教学的现状正处于一种多极化的格局. 各国家、各流派对几何教学的内容、要求和评价的把握, 有多种不同的观点和做法, 产生了多种不同的几何教学体系和教材, 差异很大. 具体说, 有以下几种:

1. 事实型. 其主要特点是突出几何事实. 这种几何教学体系开始于1960年代, 它改变了过去以几何事实为副而以学习理论表述、逻辑推理为主的观点和做法, 代之以学习更多的几何事实的"普通百姓需要的几何", 学习新的观点和做法. 这种体系, 认为受教育者需要了解更多几何知识(如卫星的轨道是圆锥曲线等), 知道如何利用几何变换, 强调几何事实而忽视证明; 表述上更注意利用儿童对空间的直觉, 使几何更有趣. 16岁以前所学的一般只是几何事实和实际问题, 16至18岁则开始分流——或是不学习几何, 或是选学A水平的几何.

2. 实用型. 主要特点是强调几何的实际应用. 这种几何教学体系产生于1970年代以后, 不同于只从数学上看问题、重视纯数学思想(如把切线看作割线的极限)和强调用严格的与形式的语言表述的几何体系. 它强调几何的应用, 重视将实际问题归结为数学问题、建立数学模型的"建模"过程, 形成学习的新结构, 把几何看作是一种作用于实际的工具. 同时, 开始重视计算机的影响, 引进计算机和计算器, 以增强实际应用中的可行性.

3. 直观型. 其主要特点是更多运用几何直观. 这种几何教学体系在1970年代末兴起. 自1969至1977年出现了称为"新数"的现代数学, 1977至1995年则兴起了称为"新数后"的改革. 它主要是改变了"新数"重结构不重对象、重一般化不重图形直观的倾向(如强调从一种语言译成另一种语言, 把多边形顶点看成"有限点集"、直线看成"线集"等). 他们认为, "新数"把空间事实的意义附加于数学本身结构, 高度一般化, 把具体问题的细节看成累赘, 是不可取的; 而且, 在"新数"课本中, 几何图形起的作用很小, 也是不利于直观的. 现在的"新数后"则强调了直观, 空间事实的意义也来自实际情况, 更多地依赖于对象而不是结构, 也更多地依赖于图形直观.

4. 论理型. 主要特点是重视几何理论的逻辑和推理论证的严格. 这种几何教学体系虽然在近几十年中有了不少改革, 可以说已经在相当程度上改变了欧氏几何的纯公理系统和纯演绎体系, 但其基本的逻辑结构没有重大变化, 演绎论证的方法仍是研究几何事实和实施应用的主要手段, 还是从一些公理或定理出发, 经过形式逻辑的演绎推理, 得到其他所有的定理, 强调"言必有据, 算必讲理". 以上海新编数学教材的几何部分为例, 它打破了封闭的公理体系, 在小学和初中的前期, 分别安排了直观几何阶段和实验几何阶段, 但在初中的第三阶段仍保持了逻辑论证的传统.

以上各种观点和做法, 各有其优点和不足. 事实上大多数国家的几何教学体系, 并不能简单地归结为某种类型, 不少国家的教材是多元化的, 实际上有几种类型的几何教材, 国际上出现了兼有重事实、重实用、重直观的趋势. 但也有些教材仍明显地属于论理型. 一般说, 小学或低年级较多为事实型、直观型, 中学或高年级较多为论理型、实用型.

此外, 我们明显地体察到, 各国对几何教学的体系、内容、要求、评价的处理和把握, 都

*本资料摘自《数学教学》1996年第2期."'21世纪几何教学展望'国际研讨会综述"一文. 作者: 张福生、唐盛昌.

把空间向量融入立体几何教学的一种教材设计

200062 华东师范大学数学系 赵小平

向量在近代数学的很多领域中都有广泛的应用, 特别是二、三维的向量, 它们既有数组的表现形式, 又有直观的几何意义, 因此能成为研究中学几何问题的有效工具. 将三维向量(也称空间向量)融入立体几何已成为当前立体几何改革的重要措施. 本文主要探究如何为这一改革措施进行课程的设计.

1. 空间向量对立体几何的渗透

在我国的中小学教学内容中, 最早引进向量的是上海市1992年颁布的《高级中学数学学科课程标准(草案)》(简称"一期标准"). 一期标准既保留了传统立体几何的主干部分, 同时又增加了向量的知识. 从依据一期标准编写的《高级中学数学课本》(简称"一期教材")中可以看到, 与立体几何相关的内容分为三章:

第八章 空间直线、平面.

内容是关于空间直线和平面的性质、它们之间的相交、平行和垂直关系的判定和性质、有关的距离和角的计算等. 这一章内容的呈现形式仍然保持着传统的欧氏几何的演绎特征.

第九章 多面体.

内容是关于棱柱、棱锥、棱台的性质和体积计算.

第十章 向量初步.

内容是关于向量的概念、运算、性质、坐标及其在立体几何中的应用. 在该章的例题中, 应用向量的方法计算异面直线所成的角、证明异面直线的垂直、证明直线与平面的垂直等.

虽然向量在立体几何中的渗透当时只是初步的尝试, 但是在实践中很容易看到, 以向量为工具解决立体几何的方法, 成为解决计算题和证明题的"通性通法", 大大降低了解题的技巧性. 受到广大教师和学生的认可和欢迎.

2. 用空间向量改造立体几何系统

2004年10月颁布的《上海市中小学数学课程标准(试行稿)》(以下简称"二期标准")对立体几何作了更大的改革. 从标题上看, "二期标准"依然由三部分内容组成:

(1) 空间图形(关于直线和平面的知识);

(2) 简单几何体的研究(关于柱体、锥体和球的知识);

(3) 空间向量及其应用.

其中第(1)、(2)部分是所有学生都要学习的基础内容(简称"第一阶段"), 第(3)部分是将要在理工科方向发展的学生必学的拓展内容(简称"第二阶段").

虽然从标题来看, "二期标准"关于立体几何的内容结构与"一期标准"类似, 但实际上对各部分内容的教学要求却与"一期标准"有很大的差别. 在"一期标准"和"一期教材"中, 基本上保留了传统的立体几何演绎系统的主干, 也就是说, 学完第八、九章后, 学生已经达到了中学立体几何的教学目标, 初步建立了空间观念、初步具备了对空间图形的位置关系、度量关系的证明和计算的能力. 而第十章的空间向量可以说是锦上添的"花", 为空间图形的研究再增添了一种先进的工具而已. 在"二期标准"中, 对第一阶段的内容作了很大的删减, 教学要求也降低了很多, 具体包括:

(1) 通过实例描述平面的概念;

还不很稳定, 甚至是很不稳定, 还处在不断的变化之中. 有的做法是突变、整体都变, 有的做法是渐变、局部地变. 几十年保持不变、特别是面临21世纪而不考虑变革的国家是没有的.

(2) 理解平面的基本性质 (公理);

(3) 会用“斜二测”方法画简单的几何体;

(4) 运用平面的基本性质进行简单的演绎推理 (演绎的内容很少, 演绎的链很短, 只涉及到公理的几个推论、等角定理、异面直线的证明. 对于与直线、平面有关的性质定理和判定定理都不要求证明);

(5) 认识直线与直线、直线与平面、平面与平面的位置关系, 会在简单情形下求异面直线所成的角 (不要求计算线面角、面面角和空间距离等).

可见, 对第一阶段的学习要求是“直观”、“初步”、“简单”地“认识”和“理解”, 使学生建立初步的空间观念、形成处理空间问题能力的基础. 而对于这个知识领域里的证明、计算、应用和转化等能力的教学要求, 都安排在第二阶段学习空间向量以后, 以空间向量为工具再实现的.

简单地说, “二期标准”将立体几何分为两个阶段, 第一阶段是以直观图为背景的综合几何系统, 教学目标只要达到启蒙水平; 第二阶段是以直观图和实数理论为共同背景、以空间向量为工具的解析几何系统, 教学目标要达到掌握和应用水平. 这种分层次地设计教学目标适合现代教育的理念.

从“二期标准”看, 向量在立体几何中的角色已经不是锦上添的“花”, 而已经成为该领域中知识量最丰富、应用最广泛的核心内容的基础和支撑.

3. 为实现阶段性教学目标所作的设计

(1) 为了实现第一阶段的教学目标, 要采用的策略是充分利用学生生活的现实空间和直观感知, 以公理化的方式展开知识体系, 落实教学目标. 依据“二期标准”编写的《高级中学课本 数学 (试验本)》(简称二期教材) 是这样设计的:

i) 以实物为载体建立空间概念.

例如用光滑的桌面、平静的湖面为直观的实体描述平面“平”的特征, 再加上“没有厚度”、“向空间无限延伸”这些适度抽象的描述实现对“平面”的定义; 用标枪落地的形象描述直线与平面的相交关系以及线面角的度量关系; 用高压电线与地面的关系描述直线与平面的平行关系以及线面距离的度量关系; 用长方体中的异面直线来形成异面直线所成角的概念; 用直尺与桌面的结合关系、自行车停放时的稳定状态等来确认公理的正确性等.

ii) 以作图和识图的实践理解空间概念.

在第一阶段的内容中始终贯穿着作空间图形的直观图的要求. 例如, 对一个平面、两个相交平面、异面直线、多面体和长方体的截面等的画法技巧都作了详细的介绍, 同时教材上也展示了很多空间图形的直观图. 通过识图和作图促进学生对空间图形的认识和对空间概念的理解.

iii) 以几何语言、集合语言、图像语言和描述性语言互相配合, 培养学生规范、严谨的几何表达能力.

iv) 初步尝试立体几何的推理方法.

虽然在第一阶段的学习中, 对学生的推理能力没有太高的要求, 但还是应当让学生体会和尝试综合几何的演绎推理方法在空间的情形. 具体地安排在以下几处:

① $\left.\begin{matrix}\text{公理1}\\\text{公理2}\\\text{公理3}\end{matrix}\right\}\Longrightarrow\left\{\begin{matrix}\text{推论1}\\\text{推论2}\\\text{推论3;}\end{matrix}\right.$

② 公理4 $\Longrightarrow$ 等角定理;

③ $\left.\begin{matrix}\text{公理}\\\text{推论}\end{matrix}\right\}\Longrightarrow$ 作长方体的截面的理由;

④ 证明两条直线是异面直线.

v) 认识简单几何体的特征, 会计算它们的体积和表面积.

落实以上各步骤, 使学生初步建立空间概念、形成处理空间问题的能力的基础.

(2) 为了实现第二阶段的教学目标所作的设计是:

i) 建立空间向量的概念、坐标、线性运算和数量积, 理解它们的几何意义;

ii) 定义直线的方向向量和平面的法向量, 使得空间图形与空间向量之间建立对应关系;

iii) 将空间直线、平面之间的位置关系转化

成空间向量之间的关系, 使得对空间图形之间关系的研究能转化为对空间向量之间关系的研究. 特别是两个向量的数量积

$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=|\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}|\cos\theta$,

它的另两个表达形式

$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}|}$ 和 $|\overrightarrow{a}|\cdot\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{b}|}$

分别能够:

① 利用直线的方向向量或平面的法向量所成的角解决空间图形中角的度量问题;

② 利用一个向量在另一个向量上的投影解决空间图形中距离的度量问题;

③ 当 $\theta=0$ 或 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 时, 能证明相应图形的平行、垂直或重合 (或包含) 等位置关系.

在这个阶段, 与直线、平面有关的平行或垂直关系的证明、距离和角的计算都只需通过向量坐标的计算就能解决. 异面直线之间的距离不需要找到公垂线, 两个平面之间的夹角不需要找到平面角, 大大降低了解题的难度.

4. 空间向量与综合几何的"嫁接"

为两个阶段的教学目标分别作了设计以后, 我们还面临的问题是, 如何将这两个阶段的内容"嫁接"起来, 才能保持数学知识体系特有的逻辑有序特征, 才能使学生同时接受两种方法, 既体会到综合方法的严谨和优雅, 又能受益于向量方法的通用性.

在第二阶段的设计中, 我们先要对下列问题作出交代:

(1) 一条直线的方向向量是否惟一? 不惟一的话, 有多少方向向量? 这些方向向量之间具有怎样的关系? 反过来, 一个向量可以作为多少直线的方向向量? 这些直线之间具有怎样的关系?

(2) 类似地, 一个平面的法向量是否惟一? 不惟一的话, 有多少法向量? 这些法向量之间存在怎样的关系? 一个向量可以作为多少平面的法向量? 这些平面之间具有怎样的关系?

(3) 如果直线的方向向量和平面的法向量都不是惟一的, 那么我们用它们来研究直线、平面间的关系, 结果是一致的吗? 该方法有效吗?

······

对于这些问题, 依据直线方向向量和平面法向量的定义和第一阶段所学的公理、推论、定理等, 如果再借助于学生的直观感知, 那么回答上述问题不是困难的; 但如果只能用严格的演绎推理的方法, 那么回答上述问题是相当费劲的. 为了使学生的精力集中于主要内容的学习, 在二期教材中作了如下的设计:

(1) 给出直线的方向向量和平面的法向量的定义:

"把与直线 l 平行的非零向量 $\overrightarrow{d}$ 叫做直线的一个方向向量";

"把与平面 π 垂直的非零向量 $\overrightarrow{n}$ 叫做平面的一个法向量".

(2) 构造一个合适的推理平台:

不加证明地给出三个被称为基础命题的真命题:

基础命题1　两条直线平行或重合的充要条件是它们的方向向量互相平行;

基础命题2　一条直线与一个平面平行或在一个平面内的充要条件是直线的方向向量垂直于该平面的法向量;

基础命题3　两个平面平行或重合的充要条件是它们的法向量互相平行.

(3) 以三个基础命题为基础, 展开关于直线、平面的位置关系的证明、角和距离的计算等.

上述第 (3) 部分是学习的主干内容, 由于第 (2) 部分的三个基础命题把空间向量完美地"嫁接"在综合几何上, 构成一个推理的基础平台. 在这个平台上可以很方便地利用向量作为工具进行推理证明和度量计算.

教材中没有对三个基础命题进行证明. 如果从第一阶段学习的内容出发, 严格地证明这三个基础命题, 将需经历冗长的推理过程. 以基础命题3的证明为例, 需涉及如下众多命题:

① 如果一条直线垂直于平面上的两条相交直线, 那么这条直线就垂直于那两条相交直线所确定的平面 (由线面垂直的定义和全等三

角形的判定);

② 任何与平面法向量平行的向量都是该平面的法向量(由法向量定义、等角定理和命题①);

③ 同一平面的法向量相互平行(由法向量的定义、两个向量垂直的充要条件和解方程);

④ 一个平面的法向量也是其平行平面的法向量(先用反证法证明平行平面被第三平面所截时的截线互相平行, 再用等角定理和命题①);

⑤ 平行平面的法向量互相平行(由命题③、④);

⑥ 具有相同法向量的平面相互平行(用反证法);

⑦ 具有平行法向量的平面相互平行(由命题②、⑥);

结论: 两个平面平行或重合的充要条件是它们的法向量相互平行(由命题⑤、⑦).

教材省略了对三个基础命题的证明是一种新的尝试, 尝试在教材中将严密的逻辑性与合理的直观性相结合的策略. 随着科学技术的发展, 要学习的内容越来越多, 对于具有严格的演绎传统的数学学科, 要使学生学到比较现代的内容, 演绎的链必定会越来越长, 而学校教学的时间毕竟有限, 适当地省略一些证明过程也是课程教材设计的策略之一. 但为了避免学生对直观感知和演绎推理的混淆, 教材还特别提醒, 这三个基础命题是可以证明的, 但"我们省略了对它们的演绎证明, 而只通过讨论或直观感知来确认它们的正确性"; 同时教材中还借助楼房的横梁、立柱、楼面等实体让学生体会这三个基础命题的正确性.

5. 对二期标准的几点修改建议

(1) 空间图形的角和距离是实用性很强的概念, 学生对它们的实际背景有比较现成的经验, 教材在第一阶段的"简单几何体的研究"中也多处涉及角和距离的概念, 因此建议在"空间图形"的学习中补充直线与平面、平面与平面所成的角的概念; 补充点到平面、平行的线面、平行的平面的距离的概念. 并在简单的情形下(不需添加辅助线)计算各种角和距离.

(2) 简单几何体的体积计算和各种距离计算需要应用线面垂直的概念, 因此建议在"空间图形"的学习中补充线面垂直的定义, 还至少要给出一个线面垂直的判定定理.

(3) 在第一阶段的学习中, 要求学生掌握用反证法证明异面直线有一定的难度, 建议是否可降低教学要求?

(上接第5–33页)

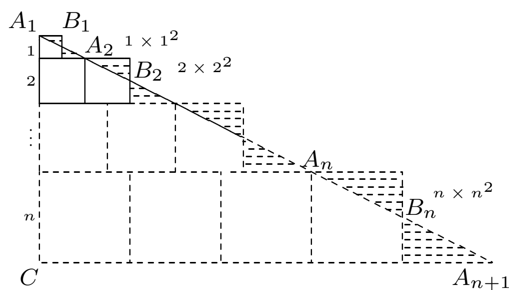


图 3

A_{n+1} 是第 n 行第 $(n+1)$ 个正方形的右下端点, $B_i\,(i=1,\,2,\,\cdots,\,n)$ 是第 i 行第 i 个正方形的右侧边的中点. 易证 $A_1,\,B_1,\,A_2,\,B_2,\,\cdots,\,A_n,\,B_n,\,A_{n+1}$ 这 $(2n+1)$ 个点共线, 从而阶梯形面积等于直角三角形 A_1CA_{n+1} 的面积, 所以有 $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\dfrac{1}{2}(n+1)\times n\times(1+2+3+\cdots+n)=\left[\dfrac{1}{2}n(n+1)\right]^2=\dfrac{1}{4}n^2(n+1)^2$.

4. 令 $S_n=(1+2+3+\cdots+n)^2=\dfrac{1}{4}n^2(n+1)^2$, 则 $S_n-S_{n-1}=\dfrac{1}{4}n^2(n+1)^2-\dfrac{1}{4}(n-1)^2n^2=n^3$. 构造数列

$$a_n=\begin{cases}1 & (n=1),\\ S_n-S_{n-1}=n^3 & (n\geqslant 2),\end{cases}$$

所以 $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=a_1+a_2+\cdots+a_n=1+(S_2-S_1)+(S_3-S_2)+\cdots+(S_n-S_{n-1})=1-S_1+S_n=S_n=\dfrac{1}{4}n^2(n+1)^2$.

参考文献

严惠风. 导出公式 $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$ 的四种方法. 数学教学. 2004年第6期.

欣赏《几何不仅仅是证明》一文随感

200062 华东师范大学数学系2003级硕士研究生 谢 茜

翻翻我们的几何课本, 印入眼帘的是一页页的定义、公理和定理的罗列; 听听我们的几何课, 基本上全是基本概念和基本定理的记忆及证明的学习; 再问问学完的学生特别是高中生"什么是几何"时, 他们的回答是"就是证明吧", 原因是他们一贯都是在学习证明——证明定理、证明命题. 但问及"什么是证明"时, 他们却说"其实我们也没有理解证明是什么".

就在这样的大背景及教学效果下, 我们的学生接受并完成了几何学习.

其实, 我们并不是强调证明不重要; 相反, 中外的数学家以及数学教育者都很重视证明的学习. Ross (1998) 声称"数学的本质在于证明"; Smith 和 Henderson (1959) 也阐述: 证明的思想在数学中起中心枢纽的作用. 正是有了这种思想我们才能揭示概念的内涵, 从而建立概念间的联系, 发现新的知识. 但是, 这并非表明在几何课中我们就要把全部的精力放在证明的学习上.

不久前, 我阅读了 Hoffer 在《美国教师》(1981) 上发表的名为《几何不仅仅是证明》的文章, 感到他的许多想法仍然适用于现在的几何教学. Hoffer 反对把证明看作是几何教学的惟一元素. 他认为证明之外还应该培养几何方面的其他基本能力, 并描述了学生思维的发展水平. 更重要的是, Hoffer 提供了一个框架, 用具体实例阐述了各种能力在各个发展水平上的表现, 为我们的实际教学提供了强有力的工具. 下面让我们先来具体看一下 Hoffer 所说的五种基本能力.

1. 直观化能力

由于几何是一门直观化的科目, 而且这种直观化通常被用作一种证明的工具, 所以学生必须具有直观化的能力. 为此, 学生需要对图形和操作性的工具多作一些探索. 比如要求学生在一个四面体 (如图 1 所示) 中找出一形状为矩形的截面, 这样学生就会联想矩形的概念、性质并且探索矩形与其他图形之间的联系.

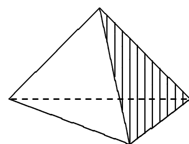


图 1

2. 口头表达能力

几何比其他数学科目更强调语言的使用. 在几何课中, 学生要学习大量几何词汇, 还有精确的几何定义以及描述图形性质和图形间关系的公理和命题. 因此, 学生要具备一定的口头表达能力.

可是, 当要求学生口头描述一个已经学过的几何概念时, 他们往往会遇到相当大的困难 ("我理解这个概念, 但是我说不出来"). 通常, 学生会用很不精确的语言去表达. 比如, 有一个学生这样描述圆: "圆就是圈状的曲线." 而且他还把垂线说成是"经过中点的直线". 上述情况的发生可能是教学上的原因: 在学生有机会用自己的语言表达概念从而意识到自己的阐述缺乏精确性之前, 我们总是把严密的定义强加给学生. 如此一来, 学生只有被动地接受, 而不能真正地理解.

3. 画图能力

几何主要处理平面和空间的数量和位置关系, 因此图形是必不可少的. 所以在几何课上我们应该多设计一些画图练习, 发展学生的画图能力. 同时这些练习也为学生学习图形关系做好了准备.

通过尺规作图, 学生会全面理解图形的性质; 使用坐标纸学生可以画出二维和三维图形, 从而更有效地学习面积、体积以及相似的知识. 例如要求学生画出一个盒子, 使它的所有边长与给定盒子的边长成常数比, 比如说成两倍. 这样学生就会分析图形, 运用比率和比例的知识去解决问题从而考虑有关相似的知识.

4. 逻辑能力

几何是一门帮助学生学着去分析论证的逻辑形式, 从而去辨认日常生活中的有效说理和无效说理的科目.

遗憾的是, 几何教学只是鼓励学生记忆而不是理解知识. 一些学完几何的学生说是通过记忆命题的证明来学习几何的. 这样学生连最基本的逻辑推理规则都不能掌握, 更别说发展他们的逻辑能力!

当然这并不是几何课程设置的原因, 而是我们的教学存在着很大的缺陷. 因为我们总是在课堂上把一大堆的逻辑规则全部展示给学生, 没有给他们自己去领会和理解的时间和机会, 所以我们在向学生罗列所有的逻辑规则之前, 应该让学生尽可能多地接触一些使用非数学语言及符号或是使用图形或图片的表达. 这样他们会慢慢地意识到非数学语言以及图形或图片在表达上的模糊性, 意识到要使用更精确的表达方式, 从而主动地使用逻辑规则.

同时, 我们还应该更多地关注这样的练习: 给出一些几何图形, 并给定一些已知条件, 然后让学生根据给定的条件推出一些结论.

如图 2 所示, 梯形 $THOR$ 满足下列条件 $RO = 15\text{cm}$, $RT = 13\text{cm}$, $OH = 20\text{cm}$, 问若要求出梯形 $THOR$ 的面积, 这些条件是否足够? 如果不够, 你至少还要知道哪个或哪些条件?

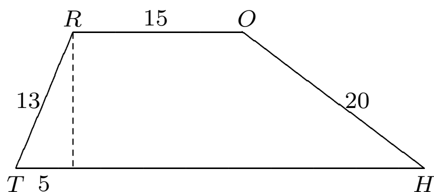


图 2

这样学生就会研究给定的条件, 去推出必须使用而已知中没有给出的条件, 从而解决问题. 这种练习可以在学习形式化的证明之前培养学生的逻辑说理能力, 进而为理解性地学习证明做好充足的准备.

5. 运用能力

古希腊人用词“mathema” ($\mu\alpha\theta\eta\mu\alpha$) 来表示“要学习的知识”. 他们把数学看作是一种对自然现象的深层次的研究. 毕达哥拉斯学派还用数学为音乐和艺术作解释. 我们把这种从数学角度去描述和解释现象及其他科学的思想称为数学建模. 数学建模被运用于各种各样的领域, 诸如农业、生物、商业、地理和心理学等等, 范围相当广泛.

为此, 我们应该在发展学生的建模能力上多投入些精力. 在几何课上, 要为学生展现几何知识在实际应用中的例子, 例如几何在农业、航空业和工程学上的运用, 以及几何被律师用作说理工具的事例.

以上是 Hoffer 的有关几何学习的 5 种基本能力的介绍.

1959 年, P.H.Van Hiele (荷兰教师) 报告了有关几何思维发展水平的研究. 他们确定了 5 个发展水平 (详见本期第 4–5 页“范·希尔的 6 个思维水平”一文).

Hoffer 用一个二维表格清晰地刻画了 5 种基本能力在不同发展水平上的表现 (表一).

表　一

水平 / 能力	水平 1	水平 2	水平 3	水平 4	水平 5
直观化	下面的图形中哪一个是矩形?	矩形有几对对称边?	在一个四面体中能找到形状为矩形的截面吗?	矩形纸可以卷成直圆柱体, 若要卷成斜圆柱体, 则需要什么形状的纸张?	在其它几何系统中是否存在对角线不相等的矩形?

能力 \ 水平	水平1	水平2	水平3	水平4	水平5
口头表达	给定矩形$ABCD$,问: 1.将AC和BD称作什么? 2.求$\angle ABC$的对角. 3.哪条边与边BC相邻?	列举出所有你所了解的矩形的性质.	叙述矩形的简短定义和标准化定义.	判断哪个是定义、公理、定理: 1.矩形是有直角的平行四边形. 2.矩形的面积是相邻两边长度之积. 3.两对角线垂直的矩形是正方形.	解释为什么在非欧几何中不存在矩形?
画图	用坐标纸画长为7个单位,宽为4个位的矩形$WXYZ$.	根据给定的一条边和一条对角线的长度,构造矩形.	给定矩形$WXYZ$和$\triangle ABC$,仅用圆规和直尺作一个内接于$\triangle ABC$并与矩形$WXYZ$相似的矩形.	下图是两个相同的圆柱体,请画出它们的公共部分.	给定一个圆,能否只使用圆规和直尺构造一个与此圆面积相等的矩形?
逻辑	矩形旋转了一个角度,现如图所示,请问现在的图形还是矩形吗?	矩形的面积能由它的周长决定吗?若两个矩形有相等的周长,则它们面积相等吗?	判断正误: 1.矩形都是正方形. 2.正方形都是矩形. 3.若一个平行四边形的两条对角线相等,则它是矩形.	若一个四边形的两条对角线相等则它是矩形.请先判断正误,再进行证明.	矩形在非欧几何中不存在,那么如何求非欧几何中图形的面积?
应用	描述在教室里及在运动场上观察到的具有矩形形状的实物.	若一块矩形区域长为100米,那么要画一张此区域的比例为1:1000的地图,则地图纸的最小长度为多少?	内接于一个给定三角形的矩形的最大面积是多少?	设计一个活塞,使其能完全无空隙地通过下面图所示的三个空洞.	世界地图上显示的一个矩形区域实际形状如何?

通过前面关于几何基本能力各思维发展水平的介绍,我们可以更全面、更深入地了解学生是如何学习几何的,从而可以改进教学,为学生提供更多的机会去获得更丰富的学习体验.可能对于我们来说,最困难的是要克服我们自己对于几何教学与学习的观念——在他们高中阶段的几何学习中形成的.希望这篇文章能够对老师有一定的启示,即几何不仅仅是证明!

参考文献

[1] Byrkit, Donald R. “Taxicab Geometry –a Non–Euclidean Geometry of Lattice Points.”Mathematics Teacher 64(May 1977): 418–422.

[2] Hoffer, Alan. Geometry. A Model of the Universe. Menlo Park: Addision–Wesleyan University. 1975.

[3] Hoffer, Alam.“Geometry is more than proof”Mathematics Teacher (January 1981): 11–18.

[4] Wirszup, Izoak. “Breakthroughs in Psychology of learning and Teaching Geometry.” Space and Geometry. Columbus. Ohio: ERIC Center. August 1976.

(上接第5–23页)

流、发现的活动中,亲身体验创新的愉悦,有效地培养学生的创新意识.

参考文献

1.中华人民共和国教育部制订. 数学课程标准. 北京师范大学出版社. 2002.

2.曹一鸣. 借鉴 整合 超越——数学教学模式运用的三重境界. 数学教育学报. 2003.3.

3.曾庆丰. 胡启胜. 创设富有探究性的问题系列. 湖北教育. 2004. 17.

一次关于排列组合的数学建模教学活动

164300 黑龙江省黑河学院数学系 由金玲 原乃冬

随着我国新一轮课程改革的不断深入, “数学建模”不仅仅以竞赛的形式出现, 我国《普通高中数学课程标准(实验)》也要求把数学建模教学渗透到每个教学模块或专题之中. 显然, 数学建模教学已经成为高中数学课程改革中一个重要的热门话题. 下面是一次以“某几个元素不在某几个位置上”为题的建模活动课的教学实录.

一、创设问题情景, 选编合适的应用题

教师: 让我们先做一个游戏, 以四个小组为单位, 每组抽出四名同学, 带着自己的椅子, 各自围成一圈儿坐好, 当我喊“预备开始”之后, 每组的四名同学都起立, 再重新坐下, 如果不许再坐到自己的位置上, 一共有多少种不同的坐法.

学生兴致勃勃地参与进来, 被抽到的同学不加思索地开始抢着往其余的三个位置上坐, 慌乱一阵之后才意识到必须有组织、 有顺序地进行. 同时有的同学意识到: 这是一道排列组合的应用问题, 四名以外的同学有的指挥着, 有的记录着, 有的拿起笔计算起来. 没过一会, 有三个组很快得到了答案.

第一组利用乘法原理: $C_3^1C_3^1(A_2^2-1)=9$ (种);

第二组利用加法原理: 3+3+3=9 (种);

第三组利用逆向思维的方法从全排列中减去不符合条件的排列数, 得到:

$A_4^4-4A_3^3+6A_2^2-4+1=9$ (种);

最慢的是第四组, 他们没有想到用排列组合知识去解决问题, 完全是一个一个排的, 答案也是9 (种).

教师: 同学们把一场普通的游戏变成了数学游戏. 看来, 数学就在我们身边, 知识是我们最好的帮手. 今天这个游戏是1994年全国高考的一道数学选择题, 属于“4个元素的全排列中, 某4个元素不能在某4个位置上”的排列组合应用问题. 同学们已经用不同的方法得到了解决, 就让我们从这道高考题出发, 开始今天的数学建模活动吧.

二、抽象概括, 建立模型, 导入学习课题

教师: 如果让大家来改编这道高考题, 你们将做怎样的改编? 请尽可能地用数学语言描述你改编的问题.

经过一番讨论, 学生将原题做了许多变换, 举例如下:

问题1 4个人围坐一圈, 撤掉第一(或二)把椅子后, 4人站起来之后, 抢坐到剩下的3(或2)把椅子上, 每人都不能坐在自己的椅子上, 有多少种坐法? 即将问题的全排列改为选排列, 其中有3个元素不在某3个位置上.

问题2 5或6、7、$\cdots$、n个人围坐一圈, 站起来之后, 都不坐在自己的椅子上, 有多少种坐法? 即将4的全排列扩大到n的全排列, 其中n个元素不在某n个位置上.

问题3 从红、黄、蓝、白、绿、棕、黑7个小球中选出5个, 分别放入红、黄、蓝、白、黑5个小口袋中, 若不允许混放(不相同的颜色的球放在一个袋子中), 也不允许同色(小球的颜色与口袋的颜色相同), 则有多少种不同的放法?

教师: 同学们将问题的空间已经拓展开了, 如果我们用数字、数学符号或数学语言将以上问题概括起来, 应该怎样描述?

学生: 以上实际问题用数学语言表述为:

从n个不同的元素中取出m ($m\leqslant n$, m、$n\in\mathbf{N}$) 个元素的排列中, 如果其中有q ($q\leqslant$

m)个元素分别不在某q个位置上的排列数是多少?

开始时, 学生考虑不到m、q的取值范围, 在教师的启发下得到.

三、研究模型, 形成数学知识

教师: 我们已经将实际问题转化为纯粹的数学问题了, 今天我们就来探讨能否找到解决这类问题的一个数学模型. 所谓数学模型是指由数字、字母、或其他数学符号组成的, 描述现实对象数量规律和空间特征的数学结构.

如何研究呢?当我们感到茫然没有头绪时, 不要忘记至理名言: 回到原点吧! 这是一个重要的科学思想方法. 事物的原点常常是取之不尽、用之不竭的源泉. 当一个一般问题不易解决时, 可以附加一些条件, 将它转化为特殊问题, 即: 一般$\Longleftrightarrow$特殊, 这也是化简一个问题常用的思维模式. 我们不妨把问题先化简, 请看:

问题4　有5把椅子排成一排摆放在前边, 从7人中选出5人坐在椅子上, (1)若甲不坐在第一位有多少种坐法? (2)若甲不坐在第一位、乙不坐在第二位有多少种坐法? (3)若甲不坐在第一位、乙不坐在第二位、丙不坐在第三位有多少种坐法? (4)若甲不坐在第一位、乙不坐在第二位、丙不坐在第三位、丁不坐在第四位有多少种坐法? 即将全排列改为选排列, 分别求出1个、2个、3个、4个元素不在某1个、2个、3个、4个位置上的排列数.

请同学们试一试如果运用你们解决游戏问题的思考方法能否解决问题4呢?

由于问题4充分体现了"某几个元素不能在某几个位置上"的特点, 大多数学生都能够运用第三组同学的逆向思维的"减去法"解决(1)、(2), 就此引导学生开始探讨.

(1) 7人中选出5人排坐在椅子上的坐法有$A_7^5 = 2520$种坐法, 甲坐在第一位的坐法有$A_6^4 = 360$种, 用"减去法"则甲不坐在第一位的坐法有:

$A_7^5 - A_6^4 = 2160$(种);

(2) 甲坐在第一位或乙坐在第二位的坐法有$2A_6^4$, 从A_7^5中减去$2A_6^4$时, 甲坐在第一位且乙坐在第二位的排法减重复了, 所以要加上A_5^3, 所以甲不在第一位且乙不坐在第二位的排法有:

$A_7^5 - 2A_6^4 + A_5^3 = 1860$(种).

教师: 我们现在不去研究所得到的结果是多少, 我们最为敏感的是得到正确答案的数学模型是什么? 为了便于我们观察和描述模型的整体性和规律性, 我们能否尽可能地用原始的数据或数学符号来表示这个模型呢? 例如: $A_6^4 = A_{7-1}^{5-1}$, $2 = C_2^1$.

学生: $A_7^5 - 2A_6^4 + A_5^3 = A_7^5 - C_2^1 A_{7-1}^{5-1} + C_1^1 A_{7-2}^{5-2}$.

教师: 有了(2)的分析过程, 我们能否尝试用同样的方法来解决问题(3)呢?

教师引导学生讨论:

(3) 根据乘法原理先选后排, 从甲、乙、丙中每次选出一人坐在他不该坐的位置上的排列数为 $C_3^1 \cdot A_6^4$种, 其中重复出现了从甲、乙、丙中每次选出两人坐在他们不该坐的位置上的排列数有$C_3^2 \cdot A_5^3$种, 同理, 在$C_3^2 \cdot A_5^3$中又重复出现了从甲、乙、丙三人中每次选出三人坐在他们不该坐的位置上的排列数$C_3^3 \cdot A_4^2$, 所以甲不坐在第一位、乙不坐在第二位、丙不坐在第三位的坐法有:

$$\begin{aligned}&A_7^5 - [C_3^1 \cdot A_6^4 - (C_3^2 \cdot A_5^3 - C_3^3 \cdot A_4^2)]\\=&A_7^5 - C_3^1 A_{7-1}^{5-1} + C_3^2 A_{7-2}^{5-2} - C_3^3 A_{7-3}^{5-3}\\=&A_7^5 + (-1)^1 C_3^1 A_{7-1}^{5-1} + (-1)^2 C_3^2 A_{7-2}^{5-2}\\&+ (-1)^3 C_3^3 A_{7-3}^{5-3}\\=&1608\text{种}.\end{aligned}$$

教师: 同学们由(3)的结论, 是否可以推广得出(4)呢?

学生: (4)甲不坐在第一位、乙不坐在第二位、丙不坐在第三位、丁不坐在第四位的坐法有:

$$\begin{aligned}&A_7^5 - \{C_4^1 A_6^4 - [C_4^2 A_5^3 - (C_4^3 A_4^2 - C_4^4 A_3^1]\}\\&= A_7^5 + (-1)^1 C_4^1 A_{7-1}^{5-1} + (-1)^2 C_4^2 A_{7-2}^{5-2}\\&\quad+(-1)^3 C_4^3 A_{7-3}^{5-3} + (-1)^4 C_4^4 A_{7-4}^{5-4}\\&= 1395\text{种}.\end{aligned}$$

教师:通过以上分析,同学们用不完全归纳法来猜想一下我们最终要得到的模型?

经过一番讨论、争议、修改得到:

"从n个不同的元素中取出$m\,(m\leqslant n,\ m$、$n\in\mathbf{N})$个元素的排列中,其中有$q\,(q\leqslant m)$个元素a_1, a_2, $\cdots$, a_q分别不在某q个位置A_1, A_2, $\cdots$, A_q"上的排列数模型为:

$$A_n^m+(-1)^1C_q^1A_{n-1}^{m-1}+(-1)^2C_q^2A_{n-2}^{m-2}+\cdots+(-1)^rC_q^rA_{n-r}^{m-r}+\cdots+(-1)^qC_q^qA_{n-q}^{m-q}$$
$$(r\leqslant q\leqslant m\leqslant n,\ m、n\in\mathbf{N}).\qquad(1)$$

四、检验模型是否正确

教师:由于实际问题情境的复杂性、开放性和我们已有数学知识经验的局限性、差异性,根据我们自己的理解所建立的数学模型往往也存在缺陷,可能会使建立的数学模型以及模型求出的解答脱离实际情况或没有实用价值. 因此,必须对模型的解进行验证,如果验证发现依据模型求出的解答与现实的结果不一样,就需要修正模型或重新建立模型,再重新求解、检验,直至得到满意的结果为止.

今天我们所得到的数学模型是一个与自然数有关的数学公式,因此,也可以利用数学归纳法验证.

教师引导学生完成:

证明: 1° $q=1$时,即从n个不同元素中取出m个元素,其中有一个元素不在某个位置上的排列数用"减去法"得: $A_n^m-A_{n-1}^{m-1}$,

由模型(1)得$A_n^m+(-1)^1C_1^1A_{n-1}^{m-1}=A_n^m-A_{n-1}^{m-1}$,

说明$q=1$时数学模型(1)是正确的;

2° 假设$q=k\,(k\in\mathbf{N},\ k+1\leqslant m\leqslant n)$时数学模型正确,即从$n$个不同元素$a_1$, a_2, $\cdots$, a_n中取出m个元素,其中有k个元素a_1, a_2, $\cdots$, a_k不在某k个位置A_1, A_2, $\cdots$, A_k上的排列数为:

$$A_n^m+(-1)^1C_k^1A_{n-1}^{m-1}+(-1)^2C_k^2A_{n-2}^{m-2}+\cdots+(-1)^rC_k^rA_{n-r}^{m-r}+\cdots+(-1)^kC_k^kA_{n-k}^{m-k}$$
$$(r\leqslant k+1\leqslant m\leqslant n).\qquad(2)$$

那么,当$q=k+1$时,即有a_1, a_2, $\cdots$, a_{k+1}分别不在A_1, A_2, $\cdots$, A_k, A_{k+1}上,

利用"减去法",从模型(2)中减去a_{k+1}在A_{k+1}的排列数, a_{k+1}在A_{k+1}的排列数为

$$A_{n-1}^{m-1}+(-1)^1C_k^1A_{n-2}^{m-2}+(-1)^2C_k^2A_{n-3}^{m-3}+\cdots+(-1)^rC_k^rA_{n-1-r}^{m-1-r}+\cdots+(-1)^kC_k^k\cdot A_{n-1-k}^{m-1-k}(k\in\mathbf{N},r\leqslant k+1\leqslant m\leqslant n).\qquad(3)$$

(2) − (3)即得

$$\begin{aligned}&A_n^m+[(-1)^1C_k^1A_{n-1}^{m-1}-A_{n-1}^{m-1}]\\&+[(-1)^2C_k^2A_{n-2}^{m-2}-(-1)^1C_k^1A_{n-2}^{m-2}]+\cdots\\&+[(-1)^rC_k^rA_{n-r}^{m-r}-(-1)^{r-1}C_k^{r-1}A_{n-k}^{m-k}]\\&+\cdots+[(-1)^kC_k^kA_{n-k}^{m-k}-\\&(-1)^{k-1}C_k^{k-1}A_{n-k}^{m-k}]-(-1)^kC_k^kA_{n-1-k}^{m-1-k}\\=&A_n^m+(-1)^1A_{n-1}^{m-1}(C_k^1+1)+(-1)^2A_{n-2}^{m-2}\\&\cdot(C_k^2+C_k^1)+\cdots+(-1)^rA_{n-r}^{m-r}\cdot(C_k^r+\\&C_k^{r-1})+\cdots+(-1)^kA_{n-k}^{m-k}(C_k^k+C_k^{k-1})\\&-(-1)^kC_k^k\cdot A_{n-(k+1)}^{m-(k+1)}.\end{aligned}\qquad(4)$$

因为 $C_k^1+1=C_{k+1}^1$,

$C_k^2+C_k^1=C_{k+1}^2$,

$\cdots$

$C_k^k+C_k^{k-1}=C_{k+1}^k$,

$C_k^k=C_{k+1}^{k+1}$,

$-(-1)^kC_k^kA_{n-(k+1)}^{m-(k+1)}$

$=(-1)^{k+1}C_{k+1}^{k+1}A_{n-(k+1)}^{m-(k+1)}$,

代入(4)式得

$$A_n^m+(-1)^1C_{k+1}^1A_{n-1}^{m-1}+\cdots+(-1)^rC_{k+1}^r\cdot A_{n-r}^{m-r}+\cdots+(-1)^{k+1}C_{k+1}^{k+1}A_{n-(k+1)}^{m-(k+1)},$$

即为$q=k+1$时的数学模型(1).

所以$q=k+1$时成立.

由1°、2°可知对于任意的$q\in\mathbf{N}\,(q\leqslant m\leqslant n)$都有:

从n个不同的元素中取出m个元素的排列中,某q个元素不在某q个位置的排列数数学模型为:

$$A_n^m+(-1)^1C_q^1A_{n-1}^{m-1}+\cdots+(-1)^rC_q^rA_{n-r}^{m-r}+\cdots+(-1)^qC_q^qA_{n-q}^{m-q}\quad(q\leqslant m\leqslant n).$$

证毕.

五、解决实际应用问题,享受成功的喜悦

教师:让我们再回到起点,用我们得到的数学模型来解决同学们所改编的数学问题,来体会它的实际应用价值,体验所学知识的用途和益处,享受成功的喜悦.

学生解决问题:

问题1　这是"从4个元素中取出3个元素的选排列, 其中坐在第二、第三、第四把椅子的人分别不能排在第二、第三、第四位(没有第一位)"的问题, 由此得到:

$A_4^3-C_3^1A_3^2+C_3^2A_2^1-C_3^3A_1^0=11.$

问题2　给6名同学编号为a_1、a_2、a_3、a_4、a_5、a_6, 原来的座位分别为A_1、A_2、A_3、A_4、A_5、A_6.

此问题属于a_1、a_2、a_3、a_4、a_5、a_6这6个元素的全排列中: a_1不能在A_1上, a_2不能在A_2上, a_3不能在A_3上, a_4不能在A_4上, a_5不能在A_5上, a_6不能在A_6上.

由模型(1)得每名同学不在自己的座位上的不同坐法有:

$6!-C_6^1 5!+C_6^2 4!-C_6^3 3!+C_6^4 2!-C_6^5 1!+C_6^0 0!=265$种.

问题3　从7个不同颜色的小球中选出5个分别放在5个小口袋中的排列数为A_7^5, 而排除红、黄、蓝、白、黑5个小球放在它们各自相同颜色的口袋中, 属于从7个元素中取出5个元素, 且5个元素分别不能在5个位置的选排列问题, 由模型(1)得到有如下放法:

$A_7^5-C_5^1A_6^4+C_5^2A_5^3-C_5^3A_4^2+C_5^4A_3^1-C_5^5A_2^0=1214$种.

六、归纳总结, 深化目标

教师: 现在请同学们分组讨论: 通过以上建模活动, 你有怎样的体会和感受?

学生分组讨论, 教师到各组参与和指导, 最后由各组派一名同学发言.

学生1: 这个模型太有用了, 过去我们只能解"两个元素不在某两个位置上"的问题, 现在无论几个, 都可以解决了.

教师: 这是我们第一个收获, 实现了我们研究问题的目标.

学生2: 这个模型不仅有用, 而且还好记, 非常有规律, 与"二项式定理"的形式相仿.

教师: 这是我们今天的第二个收获, 那就是同学们体会到了数学的美, 发现此数学模型不仅体现了它的适用性、可操作性的内在美, 还充分表达了它的对称性、规律性的外在美, 在我们的学习中, 正需要注意培养这种美感, 即对美的追求和对美的敏感性. 我们是否可以猜想, 随着现代科技的不断发展, 概率与统计知识越来越贴近我们, 此数学模型的应用将越来越广泛, 人们会不会把它与"二项式定理"相媲美呢?

学生3: 我们对建模的过程中所采用的"类比"、"归纳"、"从特殊到一般"的方法有了深刻的认识.

教师: 这是我们的第三个收获, 也是最重要的, 建模的过程教会了我们学习和研究问题的思想方法和思维模式, 这是我们学习的最终目标.

学生4: 今天我们是利用"减去法"得到数学模型的, 我们在解决原始问题时, 是利用了"乘法原理", 我们大家在想: 可不可以利用这种方法也能建立数学模型呢?

教师: 当然可以, 多个问题一个模型, 一个问题多个模型, 这是数学建模所提倡的. 今天的第四个收获就是: 同学们已经有了数学建模的意识, 对数学建模产生了兴趣. 其实, 在我们的生活、生产、科技实践中, 有许许多多有价值的东西, 都值得我们去探讨、去研究.

(上接第5–25页)

数学世界, 也给了学生一个妙趣横生的"游戏平台", 体现了"寓教于乐"的教学模式. 当然, 有一点必须明确, 数学游戏不能单纯使学生停留在"好玩"上, 教师必须引导学生在游戏中通过亲身参与和独立探索, 建构自己的数学知识, 获得对数学的理解, 拓宽解题思路, 使数学真正起到思维磨刀石的作用.

苏霍姆林斯基说过: "世界通过游戏展现在孩子面前, 人的创造才能常常在游戏中表现出来, 没有游戏也就没有充分的智力发展." 这句话是我这篇文章的一个很好的诠释.

高中数学复习课教学的科学性和艺术性

201204 上海市北蔡中学 彭 晖

笔者结合个人的教学实践, 就如何上好高中数学复习课谈谈一些看法.

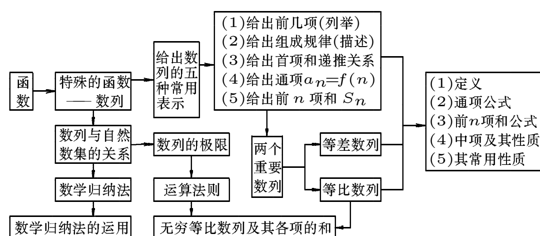
一、坚持以学生为本、以教师为导的复习原则, 构建科学的复习体系

为了减少复习课的随意性和盲目性, 教师应依据不同单元的特点和学生存在的问题, 有针对性地制定目标. 为达到这个目标, 要分阶段循序渐进、统筹安排.

1. 梳理知识网络, 整体把握知识体系, 提高学生的归纳能力

通过对知识的回顾与梳理, 弥补遗忘点, 使点点成线, 线线成面, 让学生对所学过的内容能按一定的关系, 构成一个有顺序的、有层次的、较系统的知识网络, 它是一个整合过程, 而整合了的知识最易生根发芽, 记忆深刻.

如:在学习完 "数列、数学归纳法及数列极限"一章后, 让学生课前先复习课本知识, 在此基础上, 对所学内容各自做好这一章节的知识归纳, 之后在课堂上交流, 共同串讲, 优势互补, 构成一个有序的、有层次的知识网络, 最终归结出这章知识体系是:



2. 沟通知识联系, 加深学生对知识的综合性的认识

在复习中我常常从知识网络所产生的交汇点上着手, 提出相应的问题, 并结合问题的相关要素和解答的多种途径, 来重组知识网络结构, 从而促进学生对基础知识的再建构, 对基本方法的再认识, 达到提高学生综合思考问题和解决问题能力的效果.

上述"数列、数学归纳法及数列极限"知识系统, 其实是整个中学数学知识系统的一个子系统, 它浓缩和概括了本章的全部知识, 蕴涵了许多重要数学思想和方法. 如等比数列前n项和$S_n=a_1+a_1q+a_1q^2+\cdots+a_1q^{n-1}$, 两边同乘以$q$得$qS_n=a_1q+a_1q^2+\cdots+a_1q^n$, 两式相减得$(1-q)S_n=a_1(1-q^n)$, 在$q\neq 1$的条件下得$S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$, 这种求和的方法被称为错位相减法, 当$q=1$时, $S_n=na_1$. 这两种情况体现出分类讨论这个重要的数学思想.

在上述系统中, 不仅揭示出各部分知识间内在联系, 而且还设置了许多"活扣". 在课堂上, 我充分利用系统中的"活扣"来沟通与其他相关章节知识的联系. 如"由$\sin x=1$得$x=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$, $n\in\mathbf{Z}$, 这里的$\left\{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right\}$ $(n\in\mathbf{Z})$就是一个以2π为公差的等差数列(无首项)"; "等差数列中, 公差$d=\dfrac{a_m-a_n}{m-n}$ $(m\neq n)$与解几中的斜率公式$k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ $(x_1\neq x_2)$具有本质的一致性"; "$a_n=f(n)$, $a_{2n}=f(2n)$, $\cdots$, 体现了函数自变量变换的技巧"; "若点$M(x_0,y_0)$是连接两点$P_1(x_1,y_1)$、$P_2(x_2,y_2)$的线段中点, 则x_0与y_0分别是x_1、x_2与y_1、y_2的等差中项", "若棱台的两底面面积及中截面面积分别为S_1、S_2和S_0, 则$\sqrt{S_1}$、$\sqrt{S_0}$、$\sqrt{S_2}$成等差数列, 即$\sqrt{S_0}=\dfrac{\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}}{2}$, 可化为$S_0=\dfrac{\dfrac{S_1+S_2}{2}+\sqrt{S_1S_2}}{2}$, 可表述为:棱台的中截面面积是棱台两底面面积的等差中项与等比中项的等差中项", 等等.

这样, 引导学生以提纲为中心, 向四周发散式地寻求与之相联系的知识点, 构建知识块, 把本章以及其它章节内容的知识, 构成一个有机整体, 实现知识由厚向薄, 由散乱到有序的转化, 使学生对知识的理解以螺旋式上升, 对提高学生的综合能力将大有益处.

3. 选编典型题, 培养学生思维的深刻性

问题是数学的心脏, 以本章的知识为背景创编适量的选择题、填空题、解答题, 先供学生练习, 然后师生共同讲评、小结, 其目的是突出通性通法, 强化重点, 突破难点, 矫正误点, 以"小、巧、活、宽"(题型小、方法巧、运用活、覆盖宽) 的题为载体, 快速有效地将有关知识和技能又重温、巩固、强化一遍, 从而提炼出本单元的主要思想方法; 使明 (知识) 暗 (思想方法) 两"线"相互呼应, 相得益彰.

对于习题的选编, 通常应遵循的原则是题目要有典型性、针对性、思考性、适度性和新颖性.

(例如在"函数"一章的复习中, 选编如下例题:

$f(x)=-\frac{1}{2}x^2+x$, 是否存在实数 m、$n\,(m<n)$, 使 $f(x)$ 定义域和值域分别为 $[m,n]$ 和 $[3m,3n]$. 若存在, 求出 m、n 的值; 若不存在, 说明理由.

[分析] 一些学生没多思考, 就根据二次函数的单调性, 把对称轴 $x=1$ 与端点 m、n 的关系分三类: ① $m>1$, ② $m\leqslant 1\leqslant n$, ③ $n<1$ 求解, 较繁. 解后可启发学生思考, 二次函数除了开口、对称轴外, 还有什么要素? (顶点、最值), 由最值与值域的关系, $[f(x)]_{\max}=\frac{1}{2}$, $\therefore 3n\leqslant\frac{1}{2}$, $n\leqslant\frac{1}{6}$, 故只可能有情形 ③. 因 $f(x)$ 在 $[m,n]$ 单调递增, 得 $f(m)=3m$ 且 $f(n)=3n$. 解得 $m=-4$, $n=0$ 满足题设.

此两解法, 有明显差异, 启示我们要善于挖掘题中的隐含条件, 进行直觉判断, 避免多走弯路.

二、探索复习课讲授的趣味性和艺术性

复习课不能由教师全堂灌, 更不能成为教师展示自己解题"高难动作"的"绝活表演", 而要让学生成为学习的主人, 让他们在主动积极的探索活动中实现创新、突破, 展示自己的才华智慧, 提高数学素养和悟性. 作为教学活动的组织者, 教师的任务是点拨、启发、引导、调控, 而这些都应以学生为中心.

1. "焦点访谈"式教学

复习课上有一个突出的矛盾, 就是时间紧, 既要处理足量的题目, 又要充分展示学生的思维过程, 二者似乎很难兼顾, 解决这一矛盾不妨采用"焦点访谈"法. 大多数的题目的解法是"入口宽, 上手易", 但在连续探究的过程中, 常在某一点或某几点上"搁浅"受阻, 这些点就被称为"焦点", 其余则被称为"外围". 我们大可不必在"外围"处花精力和时间去进行浅表性的启发诱导, "好钢要用到刀刃上", 而只要在焦点处发动学生探寻突破口. 通过访谈, 集中学生智慧, 让学生的思维在关键处闪光, 能力在要害处增强, 弱点在隐蔽处暴露, 意志在细微处磨砺. 通过讨论, 实现学生间、师生间智慧和能力的互补, 促进相互的心灵和感情沟通.

学生往往对稍具难度的题目有一种畏惧感, 正是这种畏惧感压抑了智慧、堵塞了思路, 通过努力明明能征服的题, 却痛失良机. "敢问路在何方? 路在脚下". 我们教育学生一方面在情境陌生的问题面前不要轻率宣布"我不会", 而要说"让我试试"; 另一方面要善于分解目标, 将题目的终端目标分解成若干个子目标, 让学生沿各个子目标拾级而上, 最终全线突破.

例如, 数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=\frac{1}{4}$, 当 $n\geqslant 2$ 时有 $(3n^2-2n-1)\,a_n=a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}$.

(1) 求 a_n; (2) 求数列的前 n 项和 S_n; (3) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$.

师: 纵观全题, 其核心是求 a_n, 但谈何容易! 别急, 我们现在能做些什么?

生: 取 $n=2$、3、4 试试.

师: 好主意!

学生依次算得 $a_2=\frac{1}{28}$, $a_3=\frac{1}{70}$, $a_4=\frac{1}{130}$.

师: 这样计算出结果反而掩盖了其中的规律, 我们要从过程中揭示这个规律.

学生有所领悟, 尝试着将各分母拆成$1\times 4, 4\times 7$, 7×10, 10×13, 发现1、4、7、10、13组成以1为首项, 3为公差的等差数列, 其通项是$3n-2$, 于是猜想, $a_n=\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}$, ……

类似的例子很多, 让学生深深感悟到在困难面前不能有丝毫的动摇和怯懦, 勇敢地迈出你的步伐, 曙光就在前头.

2. *"庖丁解牛"式教学*

我们不能依靠高考的重压及学生强烈的升学欲望来驱使学生去解数学题, 在复习中, 由于解题的量相对增大了不少, 这就要求我们将解题活动组织得生动活泼、情趣盎然, 让学生领略到数学的优美、奇异和魅力, 这样才能变苦役为享受, 有效地防止智力疲劳, 保持解题的"好胃口".

一道具有相当难度的数学题, 既像一个引人入胜的故事, 又像一部情节曲折的电视剧, 那迭起的悬念、丛生的疑窦正是它的诱人之处. 而要解决它, 又可视它如同一头庞然大牛, 只有在了解它的内部环环相扣结构之后, 才能像庖丁游刃有余. 因此在教学中要善于引导学生学做"庖丁解牛".

例　设数列$\{a_n\}$的首项$a_1=1$, 前n项和S_n满足关系$3tS_n-(2t+3)S_{n-1}=3t\,(t>0$, $n=2, 3, 4, \cdots)$.

(1) 求证: 数列$\{a_n\}$是等比数列;

(2) 设数列$\{a_n\}$的公比是$f(t)$, 作数列$\{b_n\}$, 使$b_1=1$, $b_n=f\left(\dfrac{1}{b_{n-1}}\right)$ $(n=2, 3, 4, \cdots)$, 求b_n及$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\lg a_n}{b_n}$;

(3) 求和: $B_n=b_1b_2-b_2b_3+b_3b_4-\cdots+(-1)^{n-1}b_nb_{n+1}$.

(由已知得$3tS_{n-1}-(2t+3)S_{n-2}=3t$, 减去已知式化得$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{2t+3}{3t}$.)

师: 能据此说$\{a_n\}$是等比数列吗? 为什么?

生: 不能, 这里应有$n\geqslant 3$, 还要验证$\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{2t+3}{3t}$是否成立, …

(好戏刚开场, 它就有吸引人之处.)

生: 经计算可得$\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{2t+3}{3t}$成立, 故$a_n=\left(\dfrac{2t+3}{3t}\right)^{n-1}$, 即数列$\{a_n\}$是等比数列.

(首战告捷, 学生兴趣大增.)

师: 要求b_n, 从已知$b_n=f\left(\dfrac{1}{b_{n-1}}\right)$, 初看是不是很难下手?

生: 是的, 不过由上一小题可知$f(t)=\dfrac{2t+3}{3t}$, 很容易得到$b_n=\cdots=\dfrac{2}{3}+b_{n-1}$.

生: 所以$\{b_n\}$是以1为首项, $\dfrac{2}{3}$为公差的等差数列.

(学生感到惊喜.)

师: 要求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\lg a_n}{b_n}$, 变形得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lg a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)\lg\dfrac{2t+3}{3t}}{1+\dfrac{2}{3}(n-1)},$$

上式中的$\lg\dfrac{2t+3}{3t}$象是个累赘, 怎么办?

生: 它是常数, 再复杂也不怕, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\lg a_n}{b_n}=\cdots=\dfrac{3}{2}\lg\dfrac{2t+3}{3t}$.

(又是函数, 又是对数, 又是极限, 真是精彩纷呈, 使解题掀起一个小高潮.)

师: 考验我们的时候到了, 要求B_n, 应先抓住什么?

生: 抓通项, 即

$$(-1)^{n-1}b_nb_{n+1}=\frac{(-1)^{n-1}}{9}(2n+1)(2n+3).$$

师: 但符号因子$(-1)^{n-1}$却给我们带来了很大的麻烦. 但这不是麻烦, 反而使题目更精彩. 如何解决这一麻烦?

生: 先设n为偶数, 将相邻两项配对, 则$B_n=-\dfrac{4}{9}[5+9+13+\cdots+(2n+1)]=-\dfrac{2}{9}n(n+3)$.

师: 那么如果n是奇数呢? 要能用到上面的结论该多好!

生: 能! n为奇数时, $n+1$为偶数, 这时

“制作一个五角星”的活动课教学

441021 湖北省襄樊市第七中学 曾庆丰

在“制作一个五角星”这节活动课里, 教材只是介绍了五角星的画法和制作一个五角星的步骤, 内容既单调又趋于“程序”化. 如何创造性地使用教材, 向学生提供充分从事数学活动的机会, 让他们在自主探究和合作交流的过程中, 亲身经历知识的形成过程, 进而有效地培养学生的实践能力和创新意识呢? 我们采用下述教学模式, 即以《新课标》为指导, 以“活动中体验——体验中探究——探究中创新”为活动过程的教学模式.

1. 创设情景, 烘托氛围

师: 同学们, 当我国奥运健儿在雅典奥运会上勇夺金牌, 五星红旗在赛场上频频升起, 当你把目光投向神圣的国旗时, 你有什么感触?

生1: 当我听到国歌, 注视着鲜艳的五星红旗时, 骄傲、自豪、振奋! 同时也有一种神圣的使命感!

师: 国歌、国旗和国徽代表我们中华民族的尊严, 我们除了要好好地呵护和关爱她们外, 还应了解她们. 实际上, 国歌、国旗和国徽上有许多数学问题, 比如我们今天要探究的就是国旗、国徽上的五角星.

点评: 对学生进行爱国主义教育的同时, 自然地引入新课.

2. 激发欲望, 感悟画法

师: 据我了解, 很多同学在小学时就有画五角星的经历, 哪位同学能画一个出来给大家瞧一瞧!

(寻找新知识的生长点.)

生2: 走向黑板, 先一笔而就, 而后又进行了多次修改(图略).

师: 五角星美观、和谐, 更神圣、庄严! 生2所画的五角星美观吗? 他的问题出现在哪里?

(提出富有探究性的数学问题.)

生3: 由于他的随意性, 导致了相邻角顶点间的距离不一样, 所以五个角的大小也不一样.

(语言虽不准确, 但感悟比什么都重要.)

师: 怎样画才能保证相邻角顶点间的距离是一样呢?

点评: 从学生已有的知识和经验出发, 让他们先画一个五角星, 再与美观、和谐的五角星进行比较, 来发现自己已有知识的不足, 进

$$B_n=B_{n+1}+\frac{1}{9}(2n+3)(2n+5)=\frac{2n^2+6n+7}{9}.$$

生: 这时 $n-1$ 也是偶数, $B_n=B_{n-1}-\frac{1}{9}(2n+1)(2n+3)=\frac{2n^2+6n+7}{9}$.

师: 太棒了! 至此像牛一样庞大的这道题在我们“庖丁”的手下‘有然已解, 如土委地’, 我们也应‘提刀而立, 为之四顾, 为之踌躇满志了’. (学生大笑, 引用学生语文课本中的《庖丁解牛》的语句激起学生的无限情趣, “山穷水尽”的困惑被“柳暗花明”的喜悦取代后, 学生又怎能不赞叹自己智能的威力, 至此解题活动达到最高潮.)

美国教育心理学家加涅提出的数学设计基本原理可概括为一句话: 根据不同的学习结果类型应创造不同的学习的内部条件, 并相应安排学习的外部条件. 作为教师, 自觉地积极地营造课堂民主氛围, 培养学生形成“学数学、做数学、用数学“的意识和良好习惯, 探索一种知识、能力和个性品质融为一体的素质教育将成为新教学理论下的追求.

而激发学生的好奇心和求知欲, 促使他们主动地带着问题去学习、研究和探索.

3. 研究对象, 发现特征

师: 要认识和把握一个对象, 就要研究它的特征. 大家想一想, 五角星图形有何特征?

生3: 五角星的五个角的形状和大小都一样!

师: 除此而外, 还有其它特征吗?

(出现探究障碍, 教师借助CAI课件进行如下演示:

(1) 如图1～3, 从实物中抽象出五角星模型;

(2) 发现一个中心点O;

(3) 让五角星绕其中心点O旋转一周.)

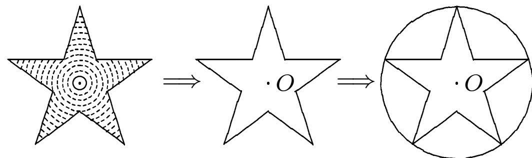


图1 图2 图3

师: 通过观察, 你发现了什么?

生4: 五角星有一个中心, 五个角的五个顶点都在以此中心为圆心的同一个圆上.

点评: 五角星的画法, 需要用到正多边形的有关知识, 这已超出了七年级学生的认知水平, 但这并不意味着教师要把五角星五个顶点与圆的位置关系说出来. 从问题的反面出发, 让五角星绕其中心旋转一周, 则五角星的五个顶点的轨迹是同一个圆, 即五角星的五个顶点在同一圆上. 这样设计, 不仅符合学生的认知规律, 而且还给学生提供了探究方向, 为发现五角星的画法奠定了基础.

4. 依傍背景, 探讨画法

师: 有了圆作为画五角星的背景, 问题就归结为: 如何在一个圆上找出五个相邻且等距离的点呢?

生5: 以圆心为顶点, 连续画$72°$ (即$360° \div 5$) 的角(如图4), 则点A、B、C、D、E相邻点间的距离是相等的.

(虽然七年级学生现在还不能明白其中的道理, 但实践表明, 他们是可以感知的.)

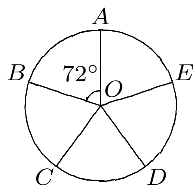


图4

师: 接下来呢?

生6: 连接每隔一点的两个点(如图5).

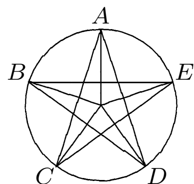


图5

师: 请同学们都试一试! 并注意擦去多余的线段.

(通过反馈的情况看, 效果还比较好. 接下来, 让学生说出上述画法的步骤.)

师: 类似地, 你能画出一个六角星、七角星、$\cdots$、n角星吗?

生7: 只需以圆心为顶点, 连续画$(360° \div 6)°$、$(360° \div 7)°$、$\cdots$、$(360° \div n)°$的角即可.

师: 请同学们用剪刀把你所画的五角星剪下来.

点评: 有了上述的发现, 学生就不难画出一个五角星了. 让学生说出画法的步骤, 旨在整理和反思活动过程; 把五角星的画法进行推广, 更想揭示画法的本质; 把五角星剪下来, 意在为"制作一个五角星"做准备. 整个设计环环相扣、探究过程层层深入.

5. 换个角度, 转向折剪

师: 剪纸是我国一项传统的手工艺术, 在世界文化艺术上堪称一绝, 深受国内外人士的喜爱.

(CAI播放(录像片)"民间艺人用彩纸剪出各种栩栩如生且具有对称性的图型".)

师: 请认真观察民间艺人剪纸画的全过程, 说出她们在剪纸过程中用到了哪些技巧?

生8: 一样的部分一般不重复剪; 图形虽然复杂, 但剪的刀数并不多; $\cdots\cdots$.

师: 你能否受上述剪画过程的启示, 用一张白纸剪出一个五角星呢?

(此时, 很多学生把五角星放在纸上进行比划.)

师: (引导) 要想由一张纸剪出一个五角星, 先要倒推回去, 返回到剪后还没展开时的状态.

怎么返回呢? 关键是要把相同的部分适当地折叠在一起——就是要把五个角, 巧妙地折叠在一起!

(受录像片的启发, 很多学生尝试着对折五角星.)

生 9: 将五角星沿直线 AF 对折, 则左右两部分重合(图6), 故只需把一张白纸对折, 然后在对折后的纸上剪出图形 $ABCDEF$ 即可.

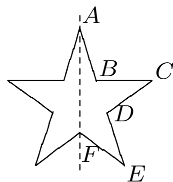


图 6

点评: 改变教材处理这部分内容的作法(直接给出折叠方法): 自己剪 (刀数多) → 看别人剪(刀数少) → 认知冲突 → 反思 → 折剪. 这样做, 知识过渡较为自然, 剪纸的方法也和谐地拓展了: 直接剪 → 折剪, 既培养了学生的实践能力和反思能力, 又培养了学生的探究精神. 由类比制造认知冲突, 使得"折剪"这一方法自然地浮出水面.

6. 五星引路, 找到折法

师: 能否把折叠进一步地深入下去? 怎样把另几个角也折叠在一起? …….

(启发学生继续折叠, 把思维引向深入.)

生 10: 可以, 因为图形 $OBCD$ (如图7) 和图形 $ODEF$ 一样大, 而图形 OAB 是它们的一半, 所以可按图7 继续折叠至图10的位置.

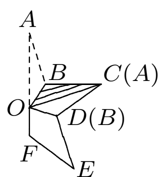


图 7

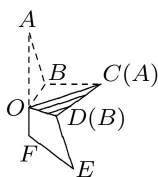


图 8

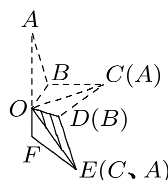


图 9

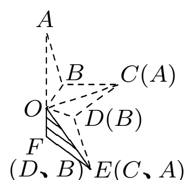
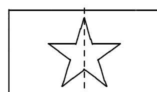


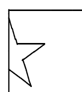
图 10

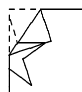
师: 怎么把这个折叠过程反映到白纸上呢? 同学之间可以展开讨论. 这里的关键是什么? ——折的角度与次数.

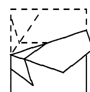
(经过讨论、实践, 大约过了三分钟.)

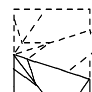
生 11: 采用五角星带路的办法, 把五角星放在一张白纸上, 按图11～16折叠.


图 11


图 12


图 13


图 14


图 15

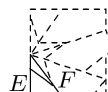


图 16

师: 要制作一个五角星, 现在我们只需怎么做?

生 12: 只需沿线段 EF 剪一刀即可.

师: 大家都动手试试!

(学生通过动手实践, 都剪出了一个与"带路"五角星一样的五角星来.)

师: 你能不能不用五角星带路, 试着再剪几个五角星呢?

(课堂气氛达到高潮.)

师: (小结) 折叠的方式很多, 只需折角在折线的中点处把折线所成的平角五等份即可; 下剪的角度不一样, 则所剪五角星的形状也有所不同.

……

点评: 创造性地使用教材, 变"教师示范, 学生模仿"的传授过程为"折叠"法的发生、发展、形成的探究过程, 把折的角度、次数的获取过程交给学生, 让他们在不断地尝试、探究、交

(下转第5–13页)

新课程让数学游戏走进初中一年级课堂

315040 浙江省宁波市曙光中学 童文波

学生眼中的数学, 多少有些高深莫测, 可敬而不可亲的味道. 那么如何改变这一现象呢? 我认为, 教师必须让孩子们在轻松愉快的氛围里得到知识的提升, 在情趣盎然的学习过程中得到能力的发展. "天才只有在自由的空气里自由地呼吸". 压抑的思想环境, 是不会产生创造性思维的火花的.

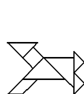
要激发学生对数学的兴趣, 提高学生的思维能力和智力水平, 我认为数学游戏不失为一条好的途经. 数学游戏内容上有趣, 解法上巧妙, 形式上新颖, 数学游戏所需要的数学知识也许并不多, 但要顺利解答趣题更多需要的是分析判断、归纳推理及灵活机智, 经常做数学游戏, 不但使学生变得更聪明, 而且还会喜欢上数学.

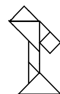
华师大版的新教材与传统教材不同点之一是, 里面安排了不少有趣的数学游戏, 不禁令人耳目一新.

一、通过数学游戏丰富学生对平面图形的认识和感受

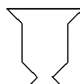
在教材的第四章安排了阅读材料《七巧板》, 七巧板是我国古代人民创造的益智游戏, 被称为"'东方魔板". 虽然它只有非常简单的七块, 但用它拼出的图形却成百上千, 诸如鸟兽鱼虫、器物、建筑等等, 惟妙惟肖, 姿态万千, 令人叫绝. 我组织了一堂兴趣课, 带领学生开展了这一活动. 游戏过程设计成按以下的三个层次逐步上升.

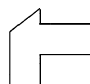
(1) 按所提供的图像(图1、图2)进行拼搭.


小狗
图 1


望远镜
图 2

(2) 根据轮廓线的拼图(图3、图4).

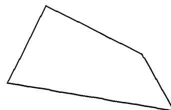

花瓶
图 3

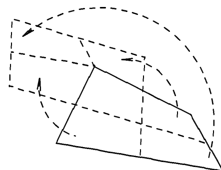

榔头
图 4

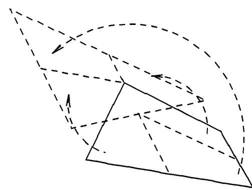
(3) 自由拼图, 自己想象出某一物体, 把它拼出来.

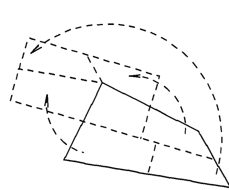
学生通过对七巧板的拼拼摆摆, 不但能引起对几何图形的兴趣, 而且进一步丰富了对平行、垂直及角等有关知识的认识.

第八章的课题学习是"图形的镶嵌", 在这一课题中可让学生分组合作, 制作一些正多边形卡片, 通过动手拼摆来探索能否用其中的一种或多种搭拼成一个平面图形, 并叫学生设计用平面图形镶嵌出来的图案, 看谁设计的图案最美丽. 还有第十二章的阅读材料"四边形的变身术", 也很有意思, 它是让学生动手拼图, 把一个任意四边形剪成四块, 探索能否拼成别的图形, 并从中体会图形的变换 (如图5～8).


任意四边形
图 5


平行四边形
图 6


三角形
图 7


矩形
图 8

通过这些游戏, 可加深学生对平面图形的认识, 丰富学生的想象力, 感受数学美, 引发发散思维和创新意识, 培养学生高尚的数学情操. 并且通过小组间的互相合作, 培养学生团结协作的精神和良好的个性品质.

二、通过数学游戏发展学生的空间观念

初一的学生抽象思维及空间想象能力相对较弱, 因而在讲授某些空间图形时, 教师要想方设法进行教学设计, 努力使抽象的内容具体化、形象化. 《立体图形的表面展开图》这节课, 既要由立体图形想象出它的表面展开图, 又要根据表面展开图判断出可折成哪个立体图形, 内容抽象, 学生较难掌握. 因而, 我在上课时, 结合了折纸游戏, 通过剪一剪, 折一折来引导学生探索立体图形与平面图形的关系,

对于某些抽象性较强的习题, 也可通过动手操作来帮助理解. 如: 教材第181页习题: 一只昆虫要从正方体的顶点A爬到顶点E, 哪条路径最短 (如图9)?

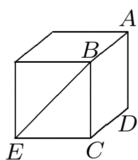


图 9

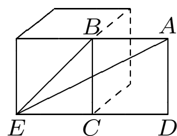


图 10

好多学生都认为最短路线为折线AB–BE(图9), 其实这是错的. 此时我就引导学生动手, 通过把正方体盒子的AC面沿棱BC展开, 寻求出答案: 应是展开面上的线段AE(图10).

三、通过数学游戏训练学生的计算能力, 培养学生的数感

在第一章的习题里, 还穿插了大家早已熟悉的"算24点"游戏. "运用加减乘除四种运算, 如何由三个5和一个1得到24?" (教材P.12). "算24点"是学生们从小学二、三年级就开始玩的游戏, 现在重拾童年乐趣, 有一种说不出的亲切感, 连那些不怎么喜欢数学的同学都跃跃欲试. 大家开动脑筋! "哈, 有了, $(5-1\div 5)\times 5=24$", 算出答案的同学脸上充满了成功的喜悦. 兴趣带来成功, 成功将激发兴趣, 这就是我们期待的良性循环. "算24点"这一游戏很能锻炼人的计算能力和思维能力, 而且其乐无穷. 近几年在中考和高考中都出现过算24点的题目, 可见它的魅力.

在教材的第12页里, 还出现了有意思的猜字游戏: $\frac{7}{8}$(打一成语); 2、4、6、8、10(打一成语), 碰到这类题目, 同学们又是眼睛一亮, 人人参与, 个个动脑, 答案马上就出来了:"七上八下和无独有偶", 气氛非常活跃.

四、通过数学游戏丰富对概率的认识, 发展学生的统计观念

《统计的初步认识》、《频率与机会》这几章讲述的是统计与概率的初步知识, 教材中安排了大量的游戏, 如: 通过"掷骰子"游戏让学生感受事件的"可能还是确定"; 通过"抛硬币"、"转罗盘"来加深对概率的认识; 通过《抢30游戏》来体验"机会的均等与不等"; 在《数据的收集与表示》这一章中, 更是鼓励学生走出课堂, 收集数据, 体会数据在解决现实生活问题中的作用.

五、通过数学游戏让学生体验数形结合的思想

第十四章的课题学习是"面积与代数恒等式", 在这个课题里再一次让学生进行拼图游戏. 通过动手, 让学生从几何的角度来认识代数恒等式. 如图11是由四个小正方形拼成的大正方形, 可以用来解释$(2a)^2=4a^2$, 图12是由一个大正方形、一个小正方形和两个长方形拼成的, 可以用来解释$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, 再鼓励学生打开思路, 任写一个恒等式, 如: $(a+2b)(2a-b)=2a^2+3ab-2b^2$, 用图13所示的正方形与长方形硬纸片的拼搭来说明它的正确性.

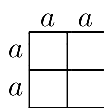


图 11

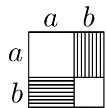


图 12

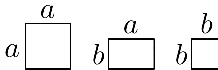


图 13

新教材不但呈现给了我们一个丰富多彩的

(下转第5–17页)

优化数学作业批改方法的措施探讨

215554 江苏省常熟农副职业高级中学 钱 芬

批改作业是教师检查教学效果、发现教学中存在问题的重要手段. 教师应该认真、及时、正确地批改学生作业. 但一提起数学作业批改, 绝大部分数学教师都感到头疼. 数学作业天天有, 学生天天做, 老师天天改, 耗时多, 师生负担重, 其原因在于大部分老师仍然沿用传统的批改方法—全批全改, 这样的批改方法愈来愈明显地表现出它的弊端, 其表现为:

方法单一,负担过重;

流于形式, 收效甚微;

忽视个性问题, 埋下学习隐患.

因此, 只有优化作业批改方法, 缩短批改周期, 加快反馈速度, 才能使师生双方及时接受正确信息, 充分发挥作业巩固知识, 检查教学效果的作用.

一、师生都应该高度重视作业批改, 这是优化作业批改方法的前提

老师应该对作业的布置、批改、讲评高度重视, 并精心设计作业, 增大课内练习, 减少课外作业. 学生也如此. 教师通过批改作业及时发现教学中的问题, 从而修正教学方法; 学生则通过作业和检查老师的批改, 及时发现学习中的问题, 并加以改正. 教师应该努力纠正学生对批阅后的作业只关注批阅符号不深思的错误行为, 培养学生及时检查和纠正批阅后的作业的良好习惯.

二、作业批改方式可以多样化

批改数学作业时, 对选择、填空、判断等直接应用公式或定理得出结论的题型可采用集体口头批改; 对学生作业中有独到之处的解题方法和思路可精批细改; 对基础较差学生的作业,可实施面批; 对习题课、小测验等作业, 可采用学生讲思路, 老师当堂板演的方法; 对复习阶段的作业, 可采用教师指导下的学生互批互改或自批自改. 总之, 作业的批改可因人而异, 因题而异, 因时而异.

以“面批”为例. 面批是师生一对一的交流, 学生能得到老师的重视, 其内心就已经非常愉快, 再加上老师在面批时, 不失时机地给予鼓励, 学生的内驱力会因此激发. 有这样一道三角题:

例 若$\cos\alpha-\cos\beta=\dfrac{1}{2}$, ①

$\sin\alpha-\sin\beta=-\dfrac{1}{3}$, ②

求$\sin(\alpha+\beta)$.

对于 ①、② 形式出现的三角习题, 等式两边平方是常见解法, 学生受其影响, 产生了下面解法:

解:$①^2+②^2$得 $2-2\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{13}{36}$,

所以有$\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{59}{72}$.

$①^2-②^2$得$\cos 2\alpha+\cos 2\beta-2\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{5}{36}$, 故$\cos(\alpha+\beta)\left(\dfrac{59}{36}-2\right)=\dfrac{5}{36}$, 解得 $\cos(\alpha+\beta)=-\dfrac{5}{13}$.

由于从已知条件中无法判断$\alpha+\beta$所在的象限, 所以有

$$\sin(\alpha+\beta)=\pm\sqrt{1-\cos^2(\alpha+\beta)}=\pm\frac{12}{13}.$$

在面批过程中我告诉学生: 这样解题无法判断$\sin(\alpha+\beta)$的正负号, 所得的结果还无法验证, 是非难辨, 学生很难自觉地从错误的解答中解脱出来. 而开方运算中的“±”号如何确定, 这是结果对错的关键, 但由于α、β没有确切的范围, 因而$\alpha-\beta$的象限无法确定, 这样, 开方中“±”号是解不开的谜, 要正确解答此题, 必须避开开方运算, 开辟新的解题思路. 然后

我指点学生由前面解$\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{59}{72}$, 只要①×②就可以得到结果.

三、充分发挥学生的主观能动性, 提倡学生作业的互批互改或自批自改

在进行互批互改时, 可以将学生分成若干个小组, 各小组由相应小组中被抽取作业的学生作为主持人, 主持人可参考自己的作业思路进行批改. 存在的问题经小组讨论后仍不能解决的, 或有一些新颖的解法, 及时反馈给老师.

比如, 有这样一个开放题: 请学生写出只有两边和一角对应相等的两个三角形全等的方案, 给出方案(1)作为例子.

方案(1) 若这个角的对边恰好是这两边中的大边, 则这两个三角形全等.

学生大多写出以下几个方案: 边角边公理、直角三角形的斜边直角边公理、若这两边相等, 则这两个三角形全等.

但有位学生对照方案(1)写了下面一个方案: 若这个角的对边恰好是两边中的小边, 则这两个三角形全等. 起先一看我还不能判断这个命题的真伪, 但在互批互改过程中, 有学生马上批它错, 并给出证明. 这种方法比较好地处理了作业中的个性问题, 也减轻了教师的负担.

四、优化作业讲评

做作业是实践, 评作业是升华. 我们一般可以从以下几方面评讲: 错在哪里? 为什么错? 怎样改才对? 如何改变题设和结论, 使错题正确? 这样评讲不是简单地肯定和否定, 而是积极引导. 对做得正确的题目同样有讲评的必要, 比如可以让学生思考回答: 解题的根据是什么? 还有没有别的解题思路? 题目还能发生什么样的变化? 作业讲评可以渗透到日常教学中, 也可以定期或不定期地进行讲评.

在函数一节中有这样一个卖报问题: 一个报童手持100份《扬子晚报》在街上叫卖,"卖报, 卖报, 五毛一份《扬子晚报》", 试建立报童所卖报纸的份数(销售量)与所得款数(销售额)之间的函数关系. 学生很容易建立起函数关系: $y=0.5x$, 但是在指明函数定义域时, 就出现了问题, 学生不能联系实际问题写出函数的定义域$x\in\{0,1,2,\cdots,100\}$. 而把定义域写成$0\leqslant x\leqslant 100$, 可见学生只是从问题的表象上去写定义域, 而缺乏真正联系实际的意识.

还可以引申下面这个问题: 设报童对批量买报(10份起批)给予九折优惠, 试建立报童一次所卖报纸的份数与报纸单价(销售价)之间的函数关系.

报童一次所卖报的份数与报纸单价(销售价)之间的函数关系是一个分段函数:

$$y=\begin{cases}0.5x, x\in\{0,1,\cdots,9\}\\ 0.45x, x\in\{10,11,\cdots,100\}\end{cases}$$

分段函数型的实际问题在现实生活中大量存在, 学生在接触这些问题时, 能否抓住问题的关键词是解决此类问题的关键, 如上述问题的"批量买报(10份起批)给予优惠", 学生在理解题意并写出函数解析式时, 也容易犯错误.

五、设计作业卡片

对平时作业中较为典型, 综合性和技巧性都很强的题目或学生容易出错的题目, 可采用作业卡片的形式加以整理、集中, 这样, 老师对学生的情况不至于因为时间的长久而遗忘, 等到复习时, 对这些典型题目进行集中攻坚, 这样可以举一反三, 加深印象. 比如在复习无理不等式的解法时, 可选用下面这道题进行解法训练.

设函数$f(x)=\sqrt{x^2+1}-ax$, 其中$a>0$, 解不等式$f(x)\leqslant 1$.

解法1: $f(x)\leqslant 1$, 即$\sqrt{x^2+1}\leqslant 1+ax$,

等价于$\begin{cases}1+ax\geqslant 0,\\ x^2+1\leqslant(1+ax)^2,\end{cases}$

即$\begin{cases}x\geqslant -\dfrac{1}{a},\\ x[(a^2-1)x+2a]\geqslant 0.\end{cases}$

解题过程比较复杂.

解法2: 由$1\leqslant\sqrt{x^2+1}$知$1\leqslant 1+ax$, 故$x\geqslant 0$, 立即得$x\geqslant -\dfrac{1}{a}$, 且$(1-a^2)x\leqslant 2a$, 解题过程得到简化.

解法3: 联想不等式与方程、函数的关系, 可用数形结合方法求解, 即在同一直角坐标系中, 分别作出函数$y=\sqrt{x^2+1}$与$y=1+ax$的图象, 前者是双曲线$y^2-x^2=1$位于x轴上方

直线分三角形两部分面积之比问题的研究

315500 浙江省奉化市奉港中学 任伟芳

三角形被直线所截得到一个小三角形和四边形, 图形虽然简单, 而它们面积之比与直线方程的关系如何却大有学问. 笔者通过研究得到如下具体结论.

1. 三个命题

引理 如图1, 若直线l与$\triangle ABC$中边AB、AC分别相交于D、E, D分$\overrightarrow{BA}$所成的比为$\lambda\,(0\leqslant\lambda\leqslant 1)$, 四边形$BDEC$与$\triangle ADE$的面积之比为$k$. 则$E$分$\overrightarrow{CA}$所成的比$\lambda'=\dfrac{k-\lambda}{1+\lambda}$ (或写成$k+1=(\lambda+1)(\lambda'+1)$形式).

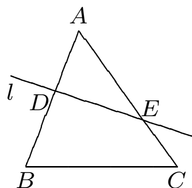


图 1

证明: 因为$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}|AB|\cdot|AC|\cdot\sin A$, $S_{\triangle ADE}=\dfrac{1}{2}|AD|\cdot|AE|\cdot\sin A$.

所以$k+1=\dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADE}}=\dfrac{|AB|\cdot|AC|}{|AD|\cdot|AE|}$.

由$\dfrac{|BD|}{|AD|}=\lambda$ 得$\dfrac{|AB|}{|AD|}=\lambda+1$, 因此$\dfrac{|AC|}{|AE|}=\dfrac{k+1}{\lambda+1}$, 所以

$$\lambda'=\frac{|EC|}{|AE|}=\frac{k+1}{\lambda+1}-1=\frac{k-\lambda}{1+\lambda}.$$

由引理不难得到以下结论:

结论1: 若$k=1$, 即l平分$\triangle ABC$的面积, 则$\lambda'=\dfrac{1-\lambda}{1+\lambda}$;

结论2: 若$k=1$, $\lambda=0$, 则$\lambda'=1$, 即DE是AC边上的中线;

结论3: 若$k=\lambda$, 则$\lambda'=0$, 即直线l过C点;

特别地$k=\lambda=1$时, DE是AB边上的中线;

结论4: 若$\lambda=0$, 则$\lambda'=k$, 即直线l过B点, 且直线l分$\triangle ABC$为两个小三角形面积比等于同高三角形的底边之比.

定理 把图1放到直角坐标系中, 若点A、B、C、D、E的横坐标分别为x_1、x_2、x_3、x_D、x_E. 则$\dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADE}}=\dfrac{(x_2-x_1)(x_3-x_1)}{(x_D-x_1)(x_E-x_1)}$ (类似地, 纵坐标亦然).

证明: 由定比分点公式知 $x_D=\dfrac{x_2+\lambda x_1}{1+\lambda}$, 得$\lambda=\dfrac{x_2-x_D}{x_D-x_1}$, 同理$\lambda'=\dfrac{x_3-x_E}{x_E-x_1}$.

由引理得

$$k+1=(\lambda+1)(\lambda'+1)=\left(\frac{x_2-x_D}{x_D-x_1}+1\right)\left(\frac{x_3-x_E}{x_E-x_1}+1\right)=\frac{(x_2-x_1)(x_3-x_1)}{(x_D-x_1)(x_E-x_1)},$$

因此$\dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADE}}=\dfrac{(x_2-x_1)(x_3-x_1)}{(x_D-x_1)(x_E-x_1)}$.

推论 如图2, 在平面上, 若$AF/\!/EJ/\!/DK/\!/CH/\!/BG$, 则$\dfrac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{S_{\triangle FJK}}{S_{\triangle FGH}}$.

的分支, 后者是经过双曲线顶点(0,1)、斜率为a的直线, 通过讨论两图象的交点而得解.

上述解法1属常规解法, 解法2属于观察的深入, 简化了解题过程, 而解法3有很强的技巧. 毋庸置疑, 数学教学要求强化通法, 淡化技巧, 但这并不等于不要技巧.

总之, 在数学教学过程中, 师生都应高度重视作业的批改, 优化数学作业批改的方法, 只有这样, 教师才能从繁琐的作业批改中解放出来.

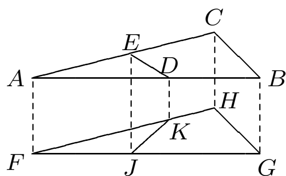


图 2

证明: 以与直线AF垂直的直线为x轴, 任意点为坐标原点, 建立直角坐标系. 因此点A与F、B与G、C与H、E与J、D与K的横坐标分别相等. 由定理即可得到结论.

2. 应用举例

例1　如图3, 已知$A(1,1)$、$B(4,4)$、$C(6,2)$, 直线l方程为$x+y-4=0$. 求直线l分$\triangle ABC$两部分的面积之比.

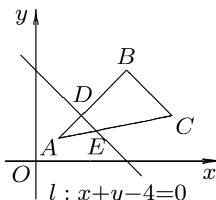


图 3

解: 直线AB的方程为$x-y=0$, 直线AC的方程为$x-5y+4=0$, 则$D(2,2)$、$E\left(\dfrac{8}{3},\dfrac{4}{3}\right)$. 由定理得

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADE}}=\frac{(4-1)\times(6-1)}{(2-1)\times\left(\dfrac{8}{3}-1\right)}=9.$$

所以直线l分$\triangle ABC$两部分, 四边形与小三角形面积之比为$8:1$.

例2　如图4, 在$\triangle ABC$中, $A(3,4)$、$B(1,2)$、$C(6,1)$, 点M的纵坐标为3, 过点M的直线l分$\triangle ABC$两部分的四边形与三角形面积之比为$3:1$, 求直线l的方程.

解: 分两种情况讨论:

(1) 当直线l与BC交于点N时.

设点M分$\overrightarrow{AC}$所成的比为λ, 点N分$\overrightarrow{BC}$所成的比为λ'. 而$y_M=3$. 由定比分点公式得$3=\dfrac{4+\lambda}{1+\lambda}$, 得$\lambda=\dfrac{1}{2}$, $x_M=4$. 又由引理知$\lambda'=\dfrac{k-\lambda}{1+\lambda}=\dfrac{5}{3}$, 所以$N\left(\dfrac{33}{8},\dfrac{11}{8}\right)$. 因此$k_{MN}=\dfrac{y_N-y_M}{x_N-x_M}=-13$, 所以直线$l$的方程为$y-3=-13(x-4)$, 即$13x+y-55=0$.

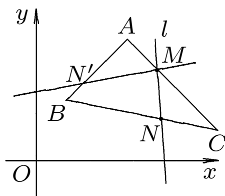


图 4

(2) 当直线l与AB交于点N'时.

仿(1)做法得直线方程为$x-5y+11=0$.

综上所述, 直线l的方程为$13x+y-55=0$或$x-5y+11=0$.

另解　因为$\dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle CMN}}=4$, $y_M=3$,

由定理得$\dfrac{4}{1}=\dfrac{(4-1)\cdot(2-1)}{(3-1)\cdot(y_N-1)}$,

得$y_N=\dfrac{11}{8}$,

故可得$N\left(\dfrac{33}{8},\dfrac{11}{8}\right)$, 以下同解法一.

例3　如图5, 已知$A(4,2)$、$B(1,-1)$、$C(5,-4)$及$\triangle ABC$外一点$P\left(2,\dfrac{21}{4}\right)$. 求过点$P$且平分$\triangle ABC$面积的直线$l$的方程.

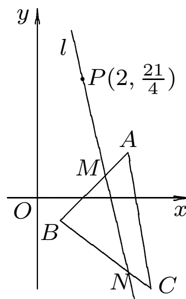


图 5

分析: 分两种情况讨论:

(1) 当l与AB和CB相交时.

设M分$\overrightarrow{AB}$所成的比为λ, N分$\overrightarrow{CB}$所成的比为λ'.

由定比分点公式知$M\left(\dfrac{4+\lambda}{1+\lambda},\dfrac{2-\lambda}{1+\lambda}\right)$, 根据引理中结论1得$\lambda'=\dfrac{k-\lambda}{1+\lambda}=\dfrac{1-\lambda}{1+\lambda}$,

因此$N\left(2\lambda+3,\dfrac{-5-3\lambda}{2}\right)$.

(下转第5–46页)

课例:能作多少个圆?

201206 上海市浦兴中学 许冬生

本节课是我近年在初三年级上的一节习题课, 学生水平在上海浦东新区属中下等水平.

一、教学设计思想

本节课是一堂变式教学课, 通过对一道中考题表达形式的变式——命题条件或结论的变化, 利用"几何画板", 对问题进行动态演示, 不断深化学生对知识的理解,引导学生发现问题、设计问题、解决问题. 这节课教师的"讲"更多地由学生积极参与的活动所代替, 学生由"听讲"、"记笔记"、"做巩固练习"的学习方式更多地变为观察、操作和尝试, 提出新的问题.

二、教学过程

师: 同学们, 看屏幕上显示的问题1:

(上海市2000年中考第16题) 已知$\odot O_1$和$\odot O_2$外切, 半径分别为1cm和3cm, 那么半径为5cm且与$\odot O_1$、$\odot O_2$都相切的圆一共可以作出______个.

师: 有同学能说出满足题目条件的圆一共可以作出多少个吗 (引出课题)?

生1: 4个.

师: 那就请你操作演示一下, 把图1上半径为5cm的圆拖动让它与$\odot O_1$、$\odot O_2$都相切.

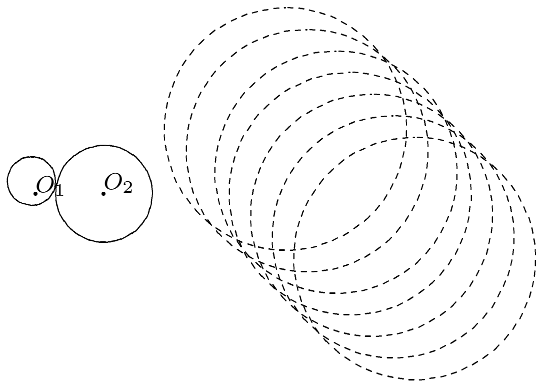


图 1

生1: 操作演示, 完成了与$\odot O_1$、$\odot O_2$都相切的4个圆的拖动, 如图2.

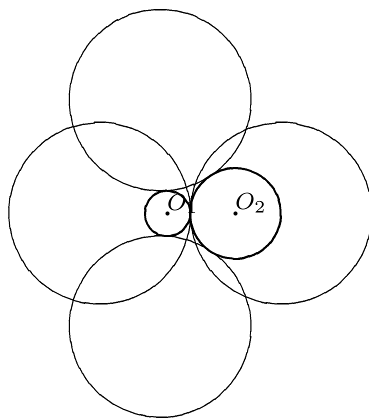


图 2

师: 我听到下面有同学说还能作2个圆, 生2你来操作演示一下.

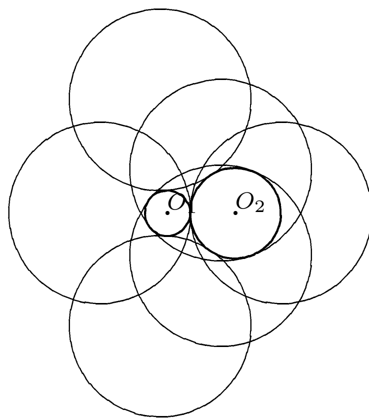


图 3

生2: 操作完成了(如图3).

师: 有同学还能作出圆吗?

生3: 还有1个.

(一些同学立刻反对说没有了.)

师: 生3你说还能作1个圆, 你上来操作演示一下, 好吗?

(生3犹豫了片刻.)

生3: 没有了.

师: 你怎么想到还能作出1个圆的?

生3: 我看图1上有7个圆, 所以我想应该可以作7个圆的.

师: 这题的正确答案应该是可以作6个圆, 我图1上给了7个圆, 是想有足够多的圆供同学们操作实验用. 下面同学们观察一下图3中的6个圆有什么特点?

生4: 这6个圆中, 有2个圆与$\odot O_1$、$\odot O_2$相外切, 有2个圆与$\odot O_1$、$\odot O_2$相内切, 有1个圆与$\odot O_1$相外切与 $\odot O_2$相内切, 有1个圆与$\odot O_1$相内切与 $\odot O_2$相外切.

师: 还有同学有补充的吗?

你们看图3是不是很漂亮、匀称? 所作出的圆是不是有一定的规律?

(一些同学在下面说对称.)

师: 关于什么对称?

生5: 关于直线O_1O_2对称.

师: 下面我们来看问题2(屏幕显示):

已知$\odot O_1$和 $\odot O_2$外切, 半径分别为1cm和3cm.

(1)半径为4cm且与$\odot O_1$、$\odot O_2$都相切的圆一共可以作出_____个;

(2)半径为3.5cm且与$\odot O_1$、$\odot O_2$都相切的圆一共可以作出_____个;

(3)半径为3cm且与$\odot O_1$、$\odot O_2$都相切的圆一共可以作出_____个;

(4)半径为2cm且与$\odot O_1$、$\odot O_2$都相切的圆一共可以作出_____个;

(5)半径为1cm且与$\odot O_1$、$\odot O_2$都相切的圆一共可以作出_____个;

(6)半径为0.5cm且与$\odot O_1$、$\odot O_2$都相切的圆一共可以作出_____个.

生6: 第(1)题5个; 第(2)题4个; 第(3)题3个; 第(4)题4个; 第(5)题3个; 第(6)题4个.

师: 回答正确. 哪位同学还能总结一下, 当所作圆的半径怎样变化时, 与$\odot O_1$、$\odot O_2$都相切的圆分别有多少个?

生7(数学课代表作出总结): (略).

师: 生7总结得非常好! 我们接着看问题3(屏幕显示): 已知$\odot O_1$和 $\odot O_2$外切, 半径分别为1和3.

(1)如果半径为r且与$\odot O_1$、$\odot O_2$都相切的圆一共可以作出3个, 那么r的范围是___;

(2)如果半径为r且与$\odot O_1$、$\odot O_2$都相切的圆一共可以作出4个, 那么r的范围是___;

(3)如果半径为r且与$\odot O_1$、$\odot O_2$都相切的圆一共可以作出5个, 那么r的范围是___;

(4)如果半径为r且与$\odot O_1$、$\odot O_2$都相切的圆一共可以作出6个, 那么r的范围是___.

师: 我改变了题目的设问方式, 哪位同学能回答这个问题?

(下面同学纷纷举手.)

生8: 第(1)题答案是$r=1$和$r=3$; 第(2)题答案是$0<r<1$和$3<r<4$; 第(3)题答案是$r=4$; 第(4)题答案是$r>4$.

师: 生8回答得很正确, 如果没有前面的问题作铺垫, 这是一道难度相当高的题目. 我们经过前面几个问题的练习, 当两个定圆$\odot O_1$和$\odot O_2$外切, 所作圆的半径变化时的这类问题同学们都已掌握得不错. 如果$\odot O_1$和 $\odot O_2$的位置改变, 比如相交、内切、内含、外离, 同学们能仿照老师编一些题目出来吗? 设计的要求(1)数字简单一点; (2)像前面的问题2一样, 形成题组形式; (3)自己一定要知道答案, 让其他同学来回答.

现在我们先就相交情况来设计题目, 看哪位同学题目设计得精彩.

生9: 我设计的一道题目是已知$\odot O_1$和$\odot O_2$相交, 半径分别为2cm和3cm, 圆心距为3cm, 那么

(1)半径为9cm且与$\odot O_1$、$\odot O_2$都相切的圆一共可以作出_____个;

(2)半径为8cm且与$\odot O_1$、$\odot O_2$都相切的圆一共可以作出_____个;

(3)半径为4cm且与$\odot O_1$、$\odot O_2$都相切的圆一共可以作出_____个;

(4)半径为3cm且与$\odot O_1$、$\odot O_2$都相切的圆一共可以作出_____个;

(5) 半径为2.5cm且与$\odot O_1$、$\odot O_2$都相切的圆一共可以作出______个;

(6) 半径为2cm且与$\odot O_1$、$\odot O_2$都相切的圆一共可以作出______个;

(7) 半径为1cm且与$\odot O_1$、$\odot O_2$都相切的圆一共可以作出______个.

师: 生9题目设计的题目相当不错, 只是有了"圆心距为3cm", 可以"把$\odot O_1$和 $\odot O_2$相交"这一条件去掉. 其他同学好好考虑, 看看能不能回答生9的问题.

(教师按照生9的叙述, 在电脑对问题2作了修改, 把生9的问题在屏幕上显示出来. 经过一段时间思考和动手操作, 有一些同学举手.)

生10: 第(1)题4个; 第(2)题3个; 第(3)题2个.

师: (问生9)他回答得正确吗?

生9: 正确.

师: 其他同学认为生10回答得对不对?

生: (齐声)对!

生11: 第(4)题2个; 第(5)题2个; 第(6)题2个; 第(7)题5个.

生12: 生11前面两个小题回答是正确的, 后面两个不对, 第(6)题应该是3个; 第(7)题应该是6个.

师: 那你把第(6)题和第(7)题操作演示一下好吗?

(生12完成了第(6)题(图4)和第(7)题(图5)的操作演示.)

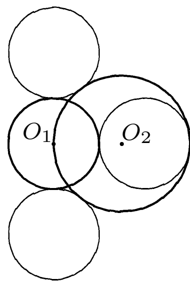


图 4

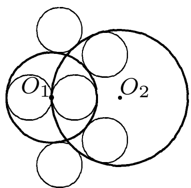


图 5

师: 我接着生9设计的问题再给出第(8)题半径为0.5cm且与 $\odot O_1$、$\odot O_2$都相切的圆一共可以作出______个. 同学们观察一下图5.

(大部分同学回答8个. 教师操作演示如图6.)

师: 生9你能就你设计的两圆相交情况总结一下, 当所作圆的半径怎样变化时, 与$\odot O_1$、$\odot O_2$都相切的圆分别有多少个?

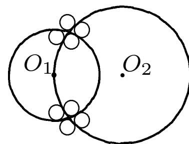


图 6

生9: 当所作圆的半径$r>8$ cm时, 与$\odot O_1$、$\odot O_2$都相切的圆有4个;

当所作圆的半径$r = 8$ cm时, 与$\odot O_1$、$\odot O_2$都相切的圆有3个;

当所作圆的半径2 cm $< r <$ 8 cm时, 与$\odot O_1$、$\odot O_2$都相切的圆有2个;

当所作圆的半径$r = 2$ cm时, 与$\odot O_1$、$\odot O_2$都相切的圆有3个;

当所作圆的半径1 cm$< r <$ 2 cm时, 与$\odot O_1$、$\odot O_2$都相切的圆有4个;

(注: 这里开始生9回答错误, 经老师提示后回答正确.)

当所作圆的半径$r = 1$ cm时, 与$\odot O_1$、$\odot O_2$都相切的圆有6个;

当所作圆的半径0 cm$< r <$ 1 cm时, 与$\odot O_1$、$\odot O_2$都相切的圆有8个.

师: 这节课从一道中考题出发, 我们通过改变问题的题设, 设计出了很多新的问题. 今天的作业, 课后就两圆内切、内含、外离情况, 自己设计问题自己解答, 也可以设计其它类似的问题, 自行解答.

三、教学后记

同学们在第二天交上来的作业中, 除了就两圆内切、内含、外离等情况, 设计出一些类似的问题, 并作相应的解答外, 还设计出一些很精彩的问题, 如

(1) 已知直线a和$\odot O$相切, $\odot O$的半径为4cm, 那么半径为1cm且与直线a和 $\odot O$都相切的圆一共可以作出______个(答案4个);

(2) 已知$\odot O$的半径为4cm, 圆心O到直线a的距离为1cm, 那么半径为1cm且与直线a和

也谈$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$公式的导出

412000　湖南省株洲市第17中学　谭雄姿

《数学教学》2004年第6期《导出公式$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$的四种方法》一文. 笔者有感于其中的第四种方法——面积法, 现再介绍另外几种直观、简洁的方法.

1. (11世纪阿拉伯数学家阿尔卡克西(953–1029)用的推导方法)构造如图1所示的n个正方形,满足条件$A_{i-1}A_i=A'_{i-1}A'_i=i-1\,(2\leqslant i\leqslant n+1)$, 则正方形$A_1A_{n+1}BA'_{n+1}$内的$n$个正方形把它分割成$n$块, 每块面积从小到大依次为$1^3$, 2^3, 3^3, $\cdots$, n^3, 所以有$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^2=\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

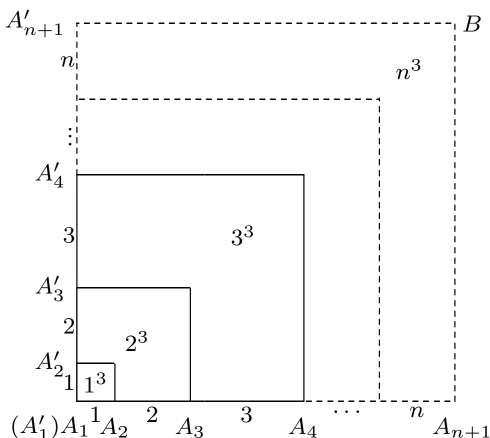


图 1

2. (11世纪另一位阿拉伯数学家阿尔·海森(965–1039)用的推导方法)把长方形$ABCD$按图2所示分割, 则有$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3+[1^2+(1^2+2^2)+(1^2+2^2+3^2)+\cdots+(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)]=(n+1)(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)$.

因为 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$
$=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
$=\dfrac{1}{3}n^3+\dfrac{1}{2}n^2+\dfrac{1}{6}n.$

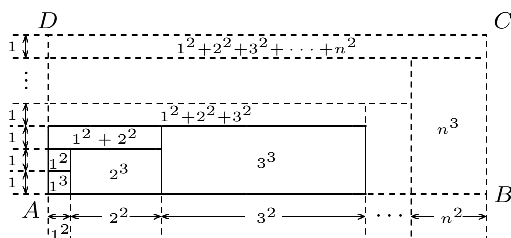


图 2

所以 $1^2+(1^2+2^2)+(1^2+2^2+3^2)+\cdots+(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)=\dfrac{1}{3}(1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3)+\dfrac{1}{2}(1^2+2^2+\cdots+n^2)+\dfrac{1}{6}(1+2+3+\cdots+n)$.

从而 $\dfrac{4}{3}(1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3)=\dfrac{1}{6}n(n+1)^2(2n+1)-\dfrac{1}{12}n(n+1)(2n+1)-\dfrac{1}{12}n(n+1)=\dfrac{1}{12}n(n+1)[2(n+1)(2n+1)-(2n+1)-1]=\dfrac{1}{12}n(n+1)\times 4n(n+1)=\dfrac{1}{3}n^2(n+1)^2$.

故$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\dfrac{1}{4}n^2(n+1)^2$.

3. 构造如图3所示的阶梯形.其中从上到下各正方形的边长分别为1, 2, 3, $\cdots$, n. $A_i\,(i=1,2,\cdots,n)$是第i行第i个正方形的左上端点,

(下转第5–10页)

$\odot O$都相切的圆一共可以作出_____个(答案8个);

(3) 已知$\odot O$的半径为1cm, 圆心O到直线a的距离为2cm, 那么半径为4cm且与直线a和$\odot O$都相切的圆一共可以作出_____个(答案4个).

基本图形在抛物线中运动的探究

312030 浙江省绍兴柯桥中学 章水云 314001 浙江省嘉兴第一中学 吕峰波

问题1 在抛物线$x^2=\frac{1}{2}y$的内部放一个动圆. 问:圆在什么情况下能接触到抛物线的顶点, 此时圆的最大半径为多少?

这是一个能激发学生兴趣、发展数学思维、提高探索能力的好题, 散见于各种数学资料中. 本文在抛物线固定的前提下, 将此问题的动圆换成不同的形状, 研究其性质, 供读者们参考.

一、抛物线中的动圆

问题1的实质就是求满足已知条件的动圆的最大半径, 下面从不同的角度给出它的解答.

方法一: 如图1, 抛物线方程为$x^2=\frac{1}{2}y$, 设圆心在y轴正半轴上, 且过原点的圆方程为$x^2+(y-r)^2=r^2$, 将之代入抛物线方程, 消去x得$y^2+\left(\frac{1}{2}-2r\right)y=0$,

$\therefore\ y_1=0,\ y_2=2r-\frac{1}{2}$, 要使圆能接触抛物线顶点, 必须$2r-\frac{1}{2}\leqslant 0$, 即当$0<r\leqslant\frac{1}{4}$时, 圆一定会触及抛物线顶点.

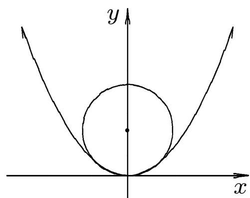


图 1

方法二: 如图2, 设抛物线上动点P的坐标为$(a,2a^2)$, 圆心在y轴正半轴上, 且过原点的圆方程为$x^2+(y-r)^2=r^2$, 若要使圆能触及抛物线顶点, 则P到圆心$(0,r)$的距离要恒大于或等于r, 即$a^2+(2a^2-r)^2\geqslant r^2$恒成立, 即$r\leqslant a^2+\frac{1}{4}$恒成立, $\therefore\ 0<r\leqslant\frac{1}{4}$.

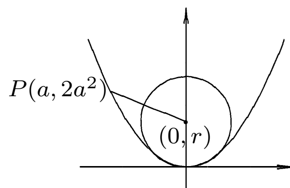


图 2

二、抛物线中的动线段

问题2 定长为2的线段AB的两个端点在上述抛物线$x^2=\frac{1}{2}y$上运动, 记线段AB的中点为E, 求点E到x轴的最短距离, 并求出此时点E的坐标.

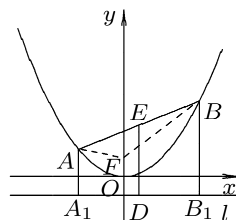


图 3

解: 如图3, 由题意可知, 焦点$F\left(0,\frac{1}{8}\right)$, 准线$l:\ y=-\frac{1}{8}$. 过$A$、$B$、$E$分别作$l$的垂线, 垂足为$A_1$、$B_1$、$D$, 连结$AF$、$BF$, 由抛物线定义可知 $|ED|=\frac{1}{2}(|AA_1|+|BB_1|)=\frac{1}{2}(|AF|+|BF|)$,

$\because\ |AB|=2$大于通径$\frac{1}{2}$,

$\therefore$ 在$\triangle AFB$中, $|AF|+|BF|\geqslant|AB|$,

$\therefore\ y_E=|ED|-\frac{1}{8}\geqslant\frac{1}{2}|AB|-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$, 当且仅当线段$AB$过焦点$F$时, 等号成立.

记AB的方程是$y=kx+\frac{1}{8}$, 代入抛物线方程得$x^2-\frac{1}{2}kx-\frac{1}{16}=0$, 由$|AB|=2$, 得$k=\pm\sqrt{3}$,

$\therefore$ E点的坐标为$\left(\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{7}{8}\right)$或$\left(-\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{7}{8}\right)$.

更一般地, 如果把细棒的长度变为a, 上述情况如何呢? 下面我们来进一步探究: 设中点$E(x_0,y_0)$, 直线AB的方程为

$$\begin{cases} x=x_0+t\cos\alpha, \\ y=y_0+t\sin\alpha, \end{cases} (t\text{为参数}),$$

由抛物线的对称性, 可令$0\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2}$,

将参数方程代入$x^2=\frac{1}{2}y$,

整理得$2t^2\cos^2\alpha+(4x_0\cos\alpha-\sin\alpha)t+2x_0^2-y_0=0$.

又E是中点, 所以

$$t_1+t_2=\frac{\sin\alpha-4x_0\cos\alpha}{2\cos^2\alpha}=0,$$

从而$\tan\alpha=4x_0$.

$$\because\ a=|t_1-t_2|=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}=\sqrt{\frac{2(y_0-2x_0^2)}{\cos^2\alpha}},$$

$$\begin{aligned}\therefore\ y_0&=2x_0^2+\frac{1}{2}a^2\cos^2\alpha\\&=\frac{1}{8}\tan^2\alpha+\frac{1}{2}a^2\cos^2\alpha\\&=\frac{1}{8}(\sec^2\alpha+4a^2\cos^2\alpha-1)\\&=\frac{1}{8}(4a^2\cos^2\alpha+\frac{1}{\cos^2\alpha}-1).\end{aligned}$$

讨论: ① 当$a\geqslant\frac{1}{2}$, 此时$\cos\alpha=\sqrt{\frac{1}{2a}}$, 点$E$到$x$轴的最短距离$=\frac{1}{8}(4a-1)$.

② 当$0<a<\frac{1}{2}$, 此时$\cos\alpha=1$, 点E到x轴的最短距离$=\frac{a^2}{2}$.

由此我们还可以得到以下更一般结论: 定长为a的线段AB的两个端点, 在上述抛物线$x^2=2py$上运动, 记线段AB的中点为E, 则点E到x轴的最短距离 $d=\begin{cases}\frac{1}{2}(a-p), & a\geqslant 2p\\ \frac{a^2}{8p}, & 0<a<2p.\end{cases}$

评注: 长度a大于等于抛物线的通径可采用抛物线定义求解, 若a小于抛物线的通径则不能用此解法. 本题通过引进参数方程, 把问题化归为求函数最值, 两者统一求解, 思路清晰, 解法简洁.

三、抛物线中的动直角三角形

问题3　在上述抛物线$x^2=\frac{1}{2}y$内有一系列直角顶点与原点重合, 另两点在抛物线上运动的直角三角形, 问它们的斜边交于同一点吗?

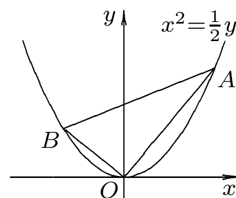


图 4

解: 如图4, 设$A(x_1,2x_1^2)$、$B(x_2,2x_2^2)$, 则直线AB方程为$\frac{y-2x_2^2}{2x_1^2-2x_2^2}=\frac{x-x_2}{x_1-x_2}$,

化简得$y-2x_2^2=2(x_1+x_2)(x-x_2)$,

$$y=2(x_1+x_2)x-2x_1x_2, \qquad (*)$$

又$\because$ $OA\perp OB$,

$\therefore$ $2x_1\cdot 2x_2=-1$, 即$x_1\cdot x_2=-\frac{1}{4}$,

代入$(*)$式, 得

$$y=2(x_1+x_2)x+\frac{1}{2},$$

故它们的斜边经过定点$\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

下面我们来探索更一般的情形: 把直角三角形的直角顶点从原点移到抛物线上任一点P处, 其它条件不变, 此时斜边AB还过定点.

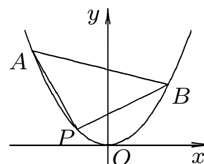


图 5

证明: 如图5, 设$P(a,2a^2)$. $\because$ $AP\perp BP$,

$$\therefore\ \frac{2a^2-2x_1^2}{a-x_1}\cdot\frac{2a^2-2x_2^2}{a-x_2}=-1,$$

化简得$(a+x_1)(a+x_2)=-\frac{1}{4}$,

即$a^2+a(x_1+x_2)+x_1x_2=-\frac{1}{4}$.

$\therefore$ $x_1x_2=-\frac{1}{4}-a(x_1+x_2)-a^2$,

代入$(*)$式, 同理可得

$$y=2(x_1+x_2)(x+a)+\left(\frac{1}{2}+2a^2\right).$$

此时斜边AB过定点$\left(-a,\frac{1}{2}+2a^2\right)$.

我们再来探索:在上述情形下,过P点作AB的垂线,垂足为Q,问Q的轨迹是什么?

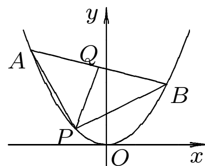


图 6

解:如图6,设$Q(x,y)$、$P(a,2a^2)$,

$\because$ AB过定点$\left(-a,\frac{1}{2}+2a^2\right)$,

$\therefore$ $k_{PQ}=\dfrac{y-2a^2}{x-a}$, $k_{AB}=\dfrac{y-\frac{1}{2}-2a^2}{x+a}$,

又$\because$ $AB\perp PQ$,

$\therefore$ $k_{PQ}k_{AB}=-1$,

即$\dfrac{y-2a^2}{x-a}\cdot\dfrac{y-\frac{1}{2}-2a^2}{x+a}=-1$,化简得

$$x^2+y^2-\left(\frac{1}{2}+4a^2\right)y+4a^4=0.$$

显然Q点的轨迹是一个圆(去掉点P).

评注:当Q点为原点,抛物线方程$x^2=\frac{1}{2}y$为$y^2=4px$,此题即为2000年北京、安徽春季高考理第22题.

如果把直角三角形改为任意三角形且两边倾斜角互补,我们还可以得到一个更有趣的性质:P为抛物线上任一点,直线PA、PB与抛物线交于A、B两点,若PA、PB的倾斜角互补,则AB为一组平行直线.

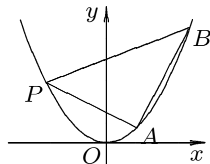


图 7

证明:如图7,设$P(a,2a^2)$、$A(x_1,2x_1^2)$、$B(x_2,2x_2^2)$,PA斜率为k,则PA直线方程为$y=k(x-a)+2a^2$,代入抛物线方程得$2x^2-kx+ak-2a^2=0$,

$\therefore$ $x_1+a=\dfrac{k}{2}$.

同理$x_2+a=\dfrac{-k}{2}$,

$\therefore$ $x_1+x_2=-2a$,

$$\because\ k_{AB}=\frac{2x_2^2-2x_1^2}{x_2-x_1}=2(x_1+x_2)=-4a.$$

$\therefore$ AB为一组平行直线.

进一步探索,我们还可以得到更一般结论:若直角三角形的直角顶点为抛物线$x^2=2py$上任一点$P(2pt_0,2pt_0^2)$,另两点在抛物线上运动,此时斜边AB过定点$(-2pt_0,2p+2pt_0^2)$.

四、抛物线中的动矩形

问题4 已知P为抛物线$x^2=\frac{1}{2}y$上任一点,四边形$PACB$为动矩形,问C点的轨迹是什么?

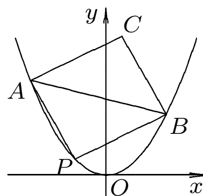


图 8

解:如图8,设$C(x,y)$. P、A、B坐标同上,由问题3得AB过定点$\left(-a,\frac{1}{2}+2a^2\right)$,故$PC$的中点$D$的坐标为$\left(\dfrac{x+a}{2},\dfrac{y+2a^2}{2}\right)$,

$\therefore$ $k_{AB}=\dfrac{y-1-2a^2}{x+3a}$,

$$\text{又 } k_{AB}=\frac{2x_2^2-2x_1^2}{x_2-x_1}=2(x_1+x_2)=2(x+a),$$

$\therefore$ $y-1-2a^2=2(x+a)(x+3a)$,

整理得$y=2x^2+8ax+8a^2+1$.

故C点轨迹为一抛物线.

从上可知,基本图形在抛物线上运动蕴藏着许多优美的性质,善于挖掘这些性质,可以开阔学生思维、培养学生探究能力.因此,在日常的教学中,要引导学生多思善想,纵横探究,这样学生的思维水平定会上升到一个新的层次.

一个解析几何问题的拓展与联想

310012 浙江省杭州市学军中学 闻 杰

题目: 已知与曲线$C: x^2+y^2-2x-2y+1=0$相切的直线l交x、y轴于A、B两点, O为原点, $|OA|=a$, $|OB|=b\,(a>2,\ b>2)$, 求证: $(a-2)(b-2)=2$.

我把本题改编后作为本课的引入. 教学过程(分四个层次)

第一层次: 问题的提出与展开.

已知与圆$C: (x-r)^2+(y-r)^2=r^2$相切的直线l交x、y轴于A、B两点, O为原点. 当切线l绕圆C转动时你觉得有哪些问题值得我们去探究?

(提出开放性问题, 片刻后学生发言热烈.)

生1: $\triangle AOB$的面积应该有最大值, 周长应该有最小值, 线段AB的长应该有最小值.

生2: $\triangle AOB$的面积最大值不存在, 应该有最小值.

师: 还有问题需补充吗?

生3: 上面两同学的问题不完全对, 因为当直线转到圆左下方时, 面积、周长、长度均无最值可言, 只有当直线在圆右上方转动时, 上述问题才有意义, 故应加条件: 设点$A(a,0)$、$B(0,b)$, $a>2r$, $b>2r$.

师: 你考虑问题很全面. 还有哪位要补充?

生4: 还可以求$|OA|+|OB|$的最小值.

师: 还有吗? 如果暂时没有的话, 我们来看上述问题是否存在? 值不值得我们作深入的研究.

(打开课件探索并测试上述各问题数据, 如图1.)

(1) $\triangle AOB$的面积有无最值? 最大还是最小?

(2) $\triangle AOB$的周长有无最值? 最大还是最小?

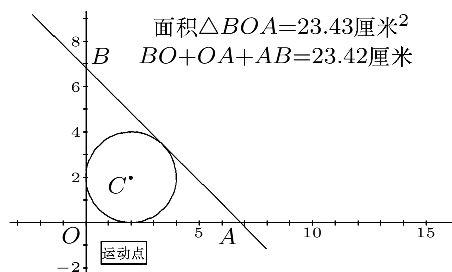


图 1

(3) 线段AB的长有无最值? 最大还是最小?

(4) $|OA|+|OB|$有最大值还是最小值?

师: 通过电脑动态展示, 我们猜想$\triangle AOB$的面积有最小值, 周长有最小值, 线段AB的长有最小值, $|OA|+|OB|$有最小值. 那么还需要严格证明吗? 当然要! 下面请分组讨论证明, 并把你们的证明过程到台前展示给大家看.

几分钟后, 各组分别派代表在实物投影仪上展示了他们的证明过程, 归纳如下:

问题1 设点$A(a,0)$、$B(0,b)$ $(a>2r,\ b>2r)$, 则直线方程为$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$, 即$bx+ay-ab=0$, 由于与圆相切, 故有

$$\frac{|br+ar-ab|}{\sqrt{a^2+b^2}}=r,$$

即$ab+2r^2-2ar-2br=0$,

从而$ab+2r^2=2r(a+b)\geqslant 4r\sqrt{ab}$, 解得$\sqrt{ab}\geqslant(2+\sqrt{2})r$或$\sqrt{ab}\leqslant(2-\sqrt{2})r$ (舍).

所以$S_{\triangle AOB}=\dfrac{1}{2}ab\geqslant(3+2\sqrt{2})r^2$.

问题2 $L=a+b+(a+b-2r)=2(a+b)-2r$, 由于$2r(a+b)=ab+2r^2$, 而$\sqrt{ab}\geqslant(2+\sqrt{2})r$, 即$ab\geqslant(6+4\sqrt{2})r^2$.

从而周长$L\geqslant(6+4\sqrt{2})r$.

问题3 $|AB|=a+b-2r$, 由于

$2r(a+b)=ab+2r^2$,

$ab \geqslant (6+4\sqrt{2})r^2$.

从而 $|AB| = a+b-2r$

$\geqslant (2+2\sqrt{2})r$.

问题4 $|OA|+|OB| = a+b$

$\geqslant (4+2\sqrt{2})r$.

上述问题达到最值的情形相同, 均为 $a = b = (2+\sqrt{2})r$, 直线方程为

$x+y-(2+\sqrt{2})r = 0$.

说明: 问题1～4是解析几何、不等式与实际问题相结合的一个很典型的问题, 由于借助了几何画板的动态功能, 使整个变化过程一目了然, 既激发了数学兴趣又训练了基本功. 在学生自感问题圆满解决的高亢情绪下教师继续发问.

师: 在直线运动的过程中, 我们能否探究一些特殊点的轨迹问题?

生5: 可以探求 AB 中点 P 的轨迹.

师: 好的, 先请大家在本子上探索, 并画出简图, 说明曲线类型, 最好能说出相关的几何特征.

(分组讨论, 成果展示.)

组1: 中点轨迹是以坐标轴为渐近线的双曲线.

组2: 中点轨迹是双曲线, 但不是以坐标轴为渐近线, 而应该是过圆心的两条与坐标轴平行的直线为渐近线.

师: 看来大家对这个问题既有共同的观点也有一定的分歧, 我们先请电脑帮助作出评判, 然后再想办法证明 (动画展示).

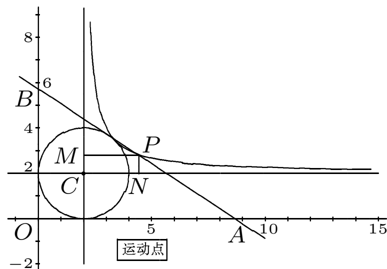


图 2

(5) 线段 AB 中点的轨迹如何? 能求吗?

动画展示结果确实如组2所述(图2), 看来你们的直觉思维很强, 那么怎样证明呢? 讨论后大家认同了一种简单的证明:

设中点 $P(x,y)$, 则 $\begin{cases} 2x = a, \\ 2y = b, \end{cases}$

由于在前述问题中有关系式 $ab+2r^2-2ar-2br = 0$, 故轨迹方程为 $2xy+r^2-2xr-2yr = 0$, 由于从方程的形式还看不出双曲线的特征, 故需对方程变形, 怎么变形有利呢?

生6: 把 y 与 x 分离开, 化为反比例函数的形式 $y = \dfrac{2xr-r^2}{2(x-r)}$ (由于 $a > 2r$, 因此 $x > r$). 这样画出的图象与我们刚才电脑上看到的图象就一致了, 而且双曲线的中心正好在圆心.

师: 很好. 还有问题要提吗?

生7: 有, 圆心 C 与中点 P 的距离应该有最小值, 因为从图上看轨迹与圆相切, 所以 $|CP|_{\min} = r$.

师: 你对图象观察得真仔细, 并得出了具体的量化数据. 还有什么问题要提?

生8: 有, 我可以把"生6"同学的函数式再变形为 $y-r = \dfrac{r^2}{2(x-r)}$, 再把 $(x-r)$ 从分母乘到左边后得 $(x-r)(y-r) = \dfrac{r^2}{2}$, 这就是以 CP 为对角线的矩形的面积 (各边与坐标轴平行), 可以断定矩形面积 $S_{CNPM} = \dfrac{r^2}{2}$ 为常数.

师: 为加深对这个问题的认识, 我们用电脑验证以上两位同学的结论. 课后请各自再证明一遍.

同学们表现很好, 提出了不少很有创建性的问题, 下面请继续观察: 如图3, 把矩形沿对角线 CP 剖开并沿直角边翻开, 得直角三角形 CEF, 请关注: (1) 三角形的面积特征, (2) 三角形斜边 EF 与轨迹的位置关系 (动画展示);

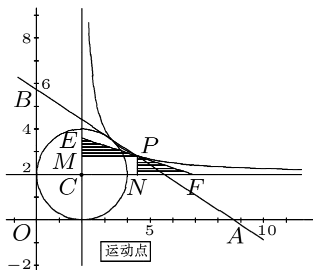


图 3

众生:三角形CEF的面积为常数r^2, 三角形斜边EF与轨迹相切(相切的证明可放到以后).

第二层次: 逆向提问, 面积为定值时中点轨迹如何.

上述“三角形CEF的面积为常数”, 如果把这个问题倒过来思考会怎样? 即“一直线与坐标轴围成三角形的面积为常数, 则其斜边中点的轨迹是什么?” (动画展示, 如图4)?”

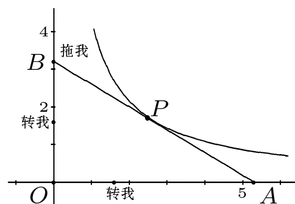


图 4

众生:双曲线.

师:怎么证明?

生9:设点$A(a,0)$、$B(0,b)$、中点$P(x,y)$, 则$2x=a$, $2y=b$, 由面积$S_{\triangle}=\dfrac{1}{2}ab$, 得$y=\dfrac{S_{\triangle}}{2x}$, 是双曲线.

师:证得简洁明快, 那么如果线段AB不是与互相垂直的坐标轴围成定面积, 而是与任意两条定直线围成定面积, 则AB中点轨迹又将如何呢? 还是双曲线吗?

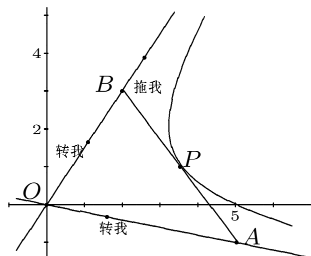


图 5

在大家迷茫之时, 教师打开动画, 描出轨迹(图5), 并分别转动直线OA、OB, 让学生看到在任意给定位置, 只要三角形OAB面积为常数, AB中点P的轨迹一定是双曲线(这里充分体现了信息技术整合到学科中的优点), 为巩固这一知识点, 下面设置了一道使OA、OB关于x轴对称的具体问题:

直线l交两射线$l_1: 2x-y=0\,(x\geqslant 0)$, $l_2: 2x+y=0\,(x\geqslant 0)$于$A$、$B$两点, 且与两射线围成的面积为4.

(1) 探求AB中点P的轨迹;

(2) 观察直线l与轨迹的关系.

(分组讨论后, 归纳较优解法如下.)

解: 如图6, 设$A(a,2a)$、$B(b,-2b)$、中点$P(x,y)$, l_1的倾斜角为θ, 则

$$|OA|=\sqrt{a^2+4a^2}=\sqrt{5}a,$$
$$|OB|=\sqrt{b^2+4b^2}=\sqrt{5}b. \qquad (1)$$

由三角形OAB面积得:

$$|OA|\cdot|OB|\sin 2\theta=8, \qquad (2)$$

$\because$ 点P是中点,

$$\therefore \begin{cases} 2x=a+b, \\ 2y=2a-2b, \end{cases}$$

$$\text{解得}\begin{cases} 2x+y=2a, \\ 2x-y=2b. \end{cases} \qquad (3)$$

而$\tan\theta=2$, 故有

$$\sin 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{4}{5}. \qquad (4)$$

将(1)、(3)、(4)代入(2)得轨迹方程: $4x^2-y^2=8$, $x>0$.

师:从上面的解法我们知道了面积定值时, 中点轨迹确实是双曲线, 那么反过来呢, 对任意的双曲线上任一点作切线与渐近线相交, 切点是不是交点的中点? 切线与渐近线围成的面积是否为常数? 过切点作渐近线的平行线所围平行四边形(原来的矩形现在为平行四边形)面积是否为常数?

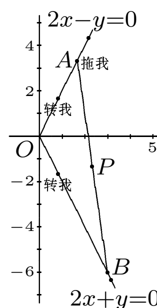


图 6

下面我们就“平行四边形面积是否为常数”展开讨论 (师生集体讨论, 并归纳解题过程).

已知双曲线方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, $P(x_0,y_0)$ 是曲线上任意一点.

求证:平行四边形$PFOE$的面积为常数.

分析: 如图7, 渐近线方程为

$bx-ay=0$, $bx+ay=0$,

过点P作渐近线的垂线, 垂足分别为M、N.

设$P(x_0,y_0)$, OM的倾斜角为θ, 因为

$$S_{PFOE}=|FP|\cdot|EP|\cdot\sin 2\theta=\frac{|PN|}{\sin 2\theta}\cdot\frac{|PM|}{\sin 2\theta}\cdot\sin 2\theta,$$

而 $|PN|=\frac{bx_0+ay_0}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $|PM|=\frac{bx_0-ay_0}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin 2\theta=\frac{2ab}{a^2+b^2}$, 代入上式, 得

$$S_{PFOE}=\frac{b^2x_0^2-a^2y_0^2}{a^2+b^2}\cdot\frac{1}{\sin 2\theta}=\frac{ab}{2}.$$

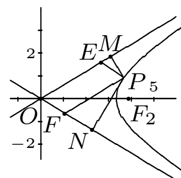


图 7

师:不仅面积是常数,而且是一个很美的结果,且与前述结论相吻合.

上面这一系列问题我们一气呵成,到此似乎该是一个完美的结局了,但是还没有,还远远没有!这还仅仅是一个开始,我们为什么不把问题拓展开去呢?

第三层次: 拓展提问, 让圆推广到椭圆或双曲线, 退化到点.

如果我们把圆拓展到椭圆、双曲线,上述哪些性质还可延续,哪些性质有所变化?是值得探究的.

拓展问题用动画展示、解析现象,让同学课外研究.

将圆推广到椭圆.

切线AB中点的轨迹是双曲线;

椭圆长短轴所在直线仍为轨迹的渐近线;

四边形$CNPM$面积仍是常数;

三角形斜边仍是轨迹的切线,且中点仍是切点(图8).

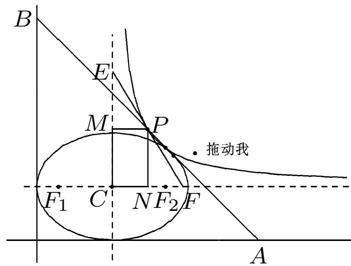


图 8

让椭圆退化到圆、退化到点.

请同学仔细观察:当椭圆慢慢退化到圆,再慢慢退化到“点”时(图9中, 焦点F_1、F_2重合,且半径趋向0), AB中点轨迹的整个变化过程,哪些东西在发生变化,哪些仍不变?

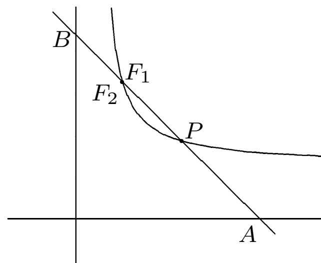


图 9

切线AB变为过定点$F_2(F_1)$的直线,但中点轨迹仍是双曲线;

OF_2中点G为轨迹中心, 矩形两边GN、GM所在直线仍为轨迹的渐近线;

四边形$GNPM$面积仍是常数;

三角形GFE斜边EF仍为轨迹的切线,且中点仍是切点(图10).

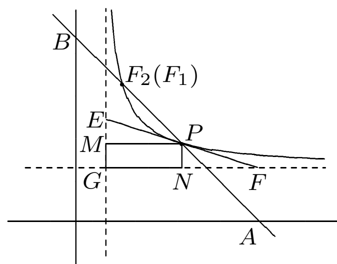


图 10

第四层次: 轨迹欣赏.

五彩缤纷的中点轨迹(感受数学之精美,图略).

谈谈用判别式法求函数的值域

710003 陕西省西安中学 薛党鹏

在数学中充满了大量的方法和技巧, 熟练掌握这些方法技巧是学会数学的关键之所在. 而要从真正意义上掌握方法, 其关键又在于理解各种数学方法的实质[1]. 用判别式法求函数值域的实质就是运用方程的观点来探讨函数值域, 只不过涉及到的方程为二次方程罢了. 其依据为由函数定义域的定义所推得的下述简单事实: 函数$y=f(x)$在定义域D上的值域即为使得关于x的方程$y=f(x)$在D上有解的y的取值范围.

例1 求函数$y=\dfrac{2x^2+2x+3}{x^2+x+1}$的值域(文[2]中的例1).

解: 求原函数的值域相当于求使关于x的方程$y=\dfrac{2x^2+2x+3}{x^2+x+1}$有实数解的$y$的取值范围. 即使关于$x$的方程$(y-2)x^2+(y-2)x+y-3=0$有实数解的$y$的取值范围.当$y=2$时, 此方程显然无实数解. 故

$$\begin{cases} y\neq 2, \\ \Delta=(y-2)^2-4(y-2)(y-3)\geqslant 0. \end{cases}$$

解之得$2<y\leqslant\dfrac{10}{3}$.

所以原函数的值域为$\left(2,\dfrac{10}{3}\right]$.

例2 求下列函数的值域(文[2]中的例2).

(1) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-2x-3}$;

(2) $y=\dfrac{x^2-x+1}{x^2-2x-3}$.

解: (1) 求原函数的值域相当于求使关于x的方程$y=\dfrac{x^2-1}{x^2-2x-3}$, 即$y=\dfrac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-3)}$有实数解的$y$的取值范围, 即使得关于$x$的方程$y=\dfrac{x-1}{x-3}$有不等于$-1$的实数解, 方程$(y-1)x=3y-1$有不等于3、$-1$的实数解的$y$的取值范围. 于是由$x\neq 3$, $x\neq -1$得$y\neq\dfrac{1}{2}$, 由$y-1\neq 0$得$y\neq 1$. 所以原函数的值域为

$$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)\bigcup\left(\frac{1}{2},1\right)\bigcup(1,+\infty).$$

(2) 求原函数的值域相当于求使关于x的方程$y=\dfrac{x^2-x+1}{x^2-2x-3}$有实数解的$y$的取值范围, 也即$(y-1)x^2+(1-2y)x-3y-1=0$有不等于3、$-1$的实数解的$y$的取值范围. 由于$x=3$或$x=-1$时, 满足$(y-1)x^2+(1-2y)x-3y-1=0$的实数$y$不存在. 于是只需$\Delta=(2y-1)^2+4(y-1)(1+3y)\geqslant 0$. 解之得$y\geqslant\dfrac{3+\sqrt{21}}{8}$或$y\leqslant\dfrac{3-\sqrt{21}}{8}$. 所以, 原函数的值域为$\left(-\infty,\dfrac{3-\sqrt{21}}{8}\right]\bigcup\left[\dfrac{3+\sqrt{21}}{8},+\infty\right)$.

下面, 我们再来分析一道比较复杂的题目.

例3 (2001年全国联赛试题) 求函数$y=x+\sqrt{x^2-3x+2}$的值域.

解法1: 求原函数的值域相当于求使关于x的方程$y-x=\sqrt{x^2-3x+2}$有解的y的取值范围, 即使$\begin{cases}(y-x)^2=x^2-3x+2, \\ x\leqslant y\end{cases}$有解的$y$的取值范围, 即使关于$x$的方程$(2y-3)x=y^2-2$有不大于$y$的根的$y$的取值范围. 显然, $y\neq\dfrac{3}{2}$, 于是由$\dfrac{y^2-2}{2y-3}\leqslant y$可解得$1\leqslant y<\dfrac{3}{2}$或$y\geqslant 2$. 所以, 原函数的值域为$\left[1,\dfrac{3}{2}\right)\bigcup[2,+\infty)$.

当然, 如果考虑到涉及函数的结构特点, 此题我们也可以运用数形结合法与三角换元法求解.

解法2: 令$t=x+\sqrt{x^2-3x+2}$, 则原问题等价于求函数

数形结合解题中要注意的几个问题

224043　江苏省盐城市大冈中学　王佳灯

数形结合的思想是中学数学中强调的重要数学思想之一，尤其是借助图形解题以其直观、形象、简捷而深受青睐，但在解具体问题时，学生往往因对图形的准确性、合理性等方面缺乏深刻的理解，导致解题出错. 本文谈谈借形解题时要注意的几个问题.

一、要注意图形的存在性

借形解题有独到的效果，但若忽视图形的存在性，只凭主观想象，无中生有，则会造成错解.

例1　如果抛物线$y^2=6x$与圆$(x-a)^2+y^2=4$没有公共点，求实数a的取值范围.

错解：由于圆的半径为2，圆心为$(a,0)$，如图1是圆与抛物线$y^2=6x$的两个相切位置，显然当圆与抛物线外切时，$a=-2$.

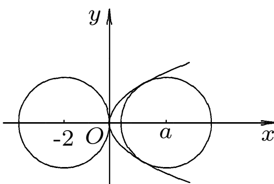


图 1

当圆与抛物线内切时，

$y=-x+t$和$y=\sqrt{x^2-3x+2}$的图象有交点时t的取值范围.

而函数$y=\sqrt{x^2-3x+2}$，

即$\begin{cases}\dfrac{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}{\frac{1}{4}}-\dfrac{y^2}{\frac{1}{4}}=1,\\ y\geqslant 0.\end{cases}$

由图1易知t的取值范围，即函数的值域为$\left[1,\frac{3}{2}\right)\bigcup[2,+\infty)$.

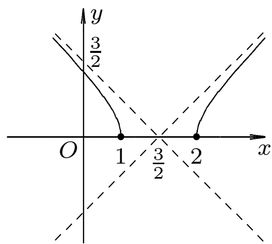


图 1

解法3：$y=x+\sqrt{x^2-3x+2}=x+\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}$，令$x-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}\sec\alpha$，其中$0\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2}$或$\pi\leqslant\alpha<\frac{3\pi}{2}$，则

$$\begin{aligned}y&=\frac{1}{2}\sec\alpha+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha\\&=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\frac{\sin\alpha-(-1)}{\cos\alpha-0}\\&=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cdot k_{PA},\end{aligned}$$

其中k_{PA}表示点P(单位圆的第一、三象限上的点，或点(1,0)，或点$(-1,0)$)和点$A(0,-1)$连线的斜率，由图2知$k_{PA}\in[-1,0)\bigcup[1,+\infty)$，进而可得原函数的值域为$\left[1,\frac{3}{2}\right)\bigcup[2,+\infty)$.

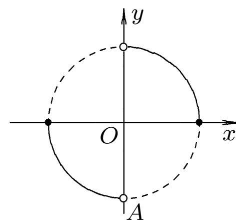


图 2

参考文献

[1] 罗增儒. 数学解题学引论. 陕西师大出版社. 2001.

[2] 高东英. 利用Δ法求函数值域应注意的问题. 中学数学教学参考. 2004. 7.

由 $\begin{cases} y^2 = 6x \\ (x-a)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ 消去y, 整理得

$$x^2 - (2a-6)x + a^2 - 4 = 0, \quad (1)$$

由$\Delta = (2a-6)^2 - 4(a^2-4) = 0$,

得$a = \dfrac{13}{6}$.

结合图形可知, 当$a < -2$或$a > \dfrac{13}{6}$时, 没有公共点.

剖析: 当$a = \dfrac{13}{6}$时, 方程(1)化为$3x^2 + 5x + \dfrac{25}{12} = 0$, 此时, 方程有两个相等的负根, 所以圆与抛物线相切的情况根本不存在.

正确解答: 原题可转化为当抛物线上的动点 $P(x, y)$ $(x \geqslant 0)$到圆心$(a, 0)$的距离d的最小值大于2时, 求a的取值范围.

考察此距离d, 有

$d^2 = (x-a)^2 + y^2 = (x-a)^2 + 6x = x^2 - 2(a-3)x + (a-3)^2 + a^2 - (a-3)^2 = [x-(a-3)]^2 + 6a - 9$,

因为$x \geqslant 0$, 所以

(1) 当$a > 3$时, 取$x = a - 3$, 有$d_{\min} = \sqrt{6a-9}$. 由$d_{\min} > 2$, 得$6a - 9 > 4$, 即$a > \dfrac{13}{6}$, 这时取$a > 3$.

(2) 当$a \leqslant 3$时, 取$x = 0$, 有$d_{\min} = |a|$. 由$d_{\min} > 2$, 得$a > 2$或$a < -2$, 此时取$2 < a \leqslant 3$或$a < -2$.

综合(1)、(2)可知, 当它们没有公共点时, $a > 2$或$a < -2$.

二、注意图形选择的合理性

借助图形解题, 往往可以通过条件转化, 选择不同图形来解, 但只有选择最优图形, 才能使解题更直观、简捷.

例2　解关于x的方程: $\lg x + \lg(4-x) = \lg(a+2x)$, 并讨论解的个数.

解: 因为$\begin{cases} x > 0, \\ 4 - x > 0, \\ a + 2x > 0, \end{cases}$

所以x至少满足$0 < x < 4$.

思路一: $a > -2x$, 即$a > -8$. 原方程化为$-x^2 + 4x = a + 2x$, 令$y_1 = -x^2 + 4x$, $(0 < x < 4)$, $y_2 = a + 2x\,(a > -8)$. 如图2可知, 此时需计算直线与抛物线相切及直线过点(0,0)、(4,0)时的a值, 显然比较繁杂.

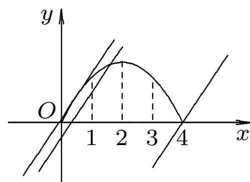


图 2

思路二: 显然方程可化为$-x^2 + 2x = a$, 此时令$y_1 = -x^2 + 2x$ $(0 < x < 4)$, $y_2 = a\,(a > -8)$, 如图3可知, 当$a > 1$或$a \leqslant -8$时, 无解;

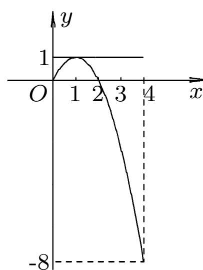


图 3

当$a = 1$时, 方程有一解$x = 1$; 当$0 < a < 1$时, 方程有两解, $x = 1 \pm \sqrt{1-a}$.

当$-8 < a \leqslant 0$时, 方程有一解, $x = 1 + \sqrt{1-a}$.

评注: 思路二比思路一合理, 因为思路二中的函数$y_2 = a\,(a > -8)$是与x轴平行的一条直线, 能容易地看出当a在各范围内取值时直线与抛物线的交点情况.

三、注意图形的准确性

借形解题, 不仅要画出函数图象或曲线的大致形状, 而且要尽量准确地描绘图形, 特别要注意同一坐标系中, 不同图形的相对位置.

例3　求方程$\lg(x+4) = 10^x$的解的个数.

错解: 在同一坐标系内画出函数$y = \lg(x+4)$与$y = 10^x$的大致图象, 如图4, 故无实数解.

剖析: 因为在$[-2, -1]$内总有$\lg(x+4) > 10^x$, 即在$[-2, -1]$上$y = \lg(x+4)$的图象总在$y = 10^x$的图象的上方, 故图4两个图象的相对位置有误, 应如图5, 在$(-\infty, 0)$上有两个交点, 即原方程有两个负根.

处理解析几何问题的非常规策略

276017 山东省临沂市罗庄区第一中学 孙志坤 马长欣 商俊宇

在处理解析几何问题时,通常从有关概念、公式和教材中介绍的基本方法入手,卡题型、套路子,一般能奏效,但有时会出现计算冗长、难以处理的局面.此时若能针对问题的不同情况,采取一些非常规的处理策略,另辟途径,常能将问题化繁为简、变难为易.

一、极限位置定范围

例1 已知向量$\overrightarrow{OB}=(2,0)$,向量$\overrightarrow{OC}=(2,2)$,向量$\overrightarrow{CA}=(\sqrt{2}\cos\alpha,\sqrt{2}\sin\alpha)$,则向量$\overrightarrow{OA}$与向量$\overrightarrow{OB}$夹角的取值范围是……( )

(A) $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$; (B) $\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{5}{12}\pi\right]$;

(C) $\left[\dfrac{5}{12}\pi,\dfrac{\pi}{2},\right]$; (D) $\left[\dfrac{\pi}{12},\dfrac{5}{12}\pi\right]$.

解:由题意,得$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CA}=(2+\sqrt{2}\cos\alpha,2+\sqrt{2}\sin\alpha)$,所以点$A$的轨迹是圆$(x-2)^2+(y-2)^2=2$,如图1、2,当$A$位于使向量$\overrightarrow{OA}$与圆相切时,向量$\overrightarrow{OA}$与向量$\overrightarrow{OB}$的夹角分别达到最大、最小值,故选(D).

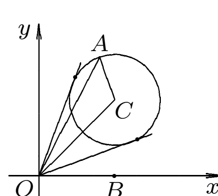


图1

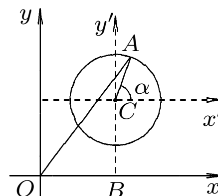


图2

评析:本题直接用向量夹角公式求解,运算量大.先确定点A的轨迹是圆,利用向量与圆相切的极限位置定出夹角的范围,无须计算,解法优美.确定直线与圆锥曲线相交的参数范围,这个方法非常有效.

二、先繁后简逆代换

例2 如图3,给定抛物线$C: y^2=4x$,F是C的焦点,过F的直线l与C相交于A、B两点,斜率为1,求向量$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OB}$的夹角.

解:C的焦点为$F(1,0)$,直线l的斜率为1,

∴ 直线l的方程为$y=x-1$,即$1=x-$

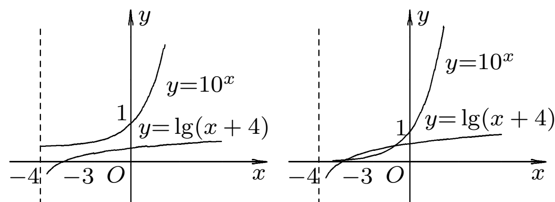


图4 图5

四、注意考虑图形的整体性

例4 求方程$2^x=x^2$的解的个数.

错解:在同一坐标系中,分别作出函数$y=2^x$与$y=x^2$的图象,如图6,可知它们有两个交点,所以方程有两个解.

剖析:图象法是解此题的独特妙法,但在作图时,若没有注意到函数$y=2^x$与$y=x^2\ (x>0)$的递增"速度"的差,而只考虑局部图形,从而会导致错误.

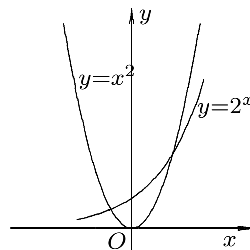


图6

事实上,当$x<0$时,显然只有一个交点;当$x>0$时,有两个交点(2,4)和(4,16),故共有三个交点,即方程有三个解.

y. 又 $y^2 = 4x \cdot 1 = 4x(x-y)$, 同除以 x^2, 得 $\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 4\left(\frac{y}{x}\right) - 4 = 0$,

$\therefore\ k_{OA} + k_{OB} = -4$, $k_{OA} \cdot k_{OB} = -4$.

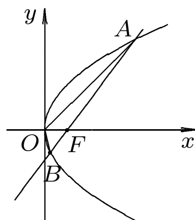


图 3

向量 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 的夹角即为直线 OB 到直线 OA 的角, 设为 θ, 则

$$\tan\theta = \frac{k_{OA} - k_{OB}}{1 + k_{OA}k_{OB}} = \frac{\sqrt{(k_{OA}+k_{OB})^2 - 4k_{OA}k_{OB}}}{1 + k_{OA}k_{OB}} = -\frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

$\therefore$ 向量 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 的夹角为

$$\pi - \arctan\frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

评析: 本题常规方法是直线 l 与抛物线 C 的方程联立消掉 y, 转化为关于 x 的二次方程, 利用韦达定理及向量夹角公式求解, 计算复杂. 借助 $1 = x - y$ 作先繁后简的逆代换, 转化为关于斜率 $\frac{y}{x}$ 的二次方程, 把向量之间夹角转化为直线到直线的角, 简洁求解. 构造关于 $\frac{y}{x}$ 的二次方程在处理斜率问题时非常方便.

三、巧设方程免讨论

例3　如图4, 设抛物线 $y^2 = 2px\,(p > 0)$ 的焦点为 F, 经过点 F 的直线交抛物线于 A、B 两点, 点 C 在抛物线的准线上, 且 $BC /\!/ x$ 轴, 证明直线 AC 经过原点 O.

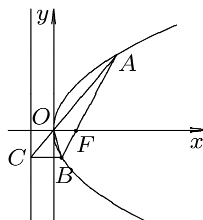


图 4

解: 设 AB 方程为 $x = my + \frac{p}{2}$, $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$, 由 $\begin{cases} x = my + \frac{p}{2}, \\ y^2 = 2px, \end{cases}$ 消去 x, 得 $y^2 - 2pmy - p^2 = 0$, $\therefore\ y_1 y_2 = -p^2$.

$\because\ BC /\!/ x$ 轴, 且点 C 在抛物线的准线 $x = -\frac{p}{2}$ 上, $\therefore$ 点 C 坐标为 $\left(-\frac{p}{2}, y_2\right)$,

$$k_{OC} = \frac{y_2}{-\frac{p}{2}} = \frac{2p}{y_1} = \frac{y_1}{x_1} = k_{OA}.$$

故 AC 经过原点.

评析: 本题常规方法是设直线的点斜式方程, 计算复杂, 且易将斜率不存在的情况漏掉. 而设直线方程的"倒斜截式": $x = my + \frac{p}{2}$, 简化运算避免讨论. 曲线方程的非标准巧设, 有着广泛的应用. 如未明确焦点位置时, 可设: $mx^2 + ny^2 = 1\,(m > 0, n > 0)$, $mx^2 - ny^2 = 1\,(mn > 0)$, $y^2 = 2px\,(p \neq 0)$ 等非标准形式, 可避免分类讨论.

四、等量关系巧转化

例4　如图5, 给定抛物线 $C: y^2 = x$, F 是 C 的焦点, 过 F 的直线 l 与 C 相交于 A、B 两点, 设 $\overrightarrow{FB} = \lambda\overrightarrow{AF}$, 若 $\lambda \in [4, 9]$, 求直线 l 在 y 轴上截距的变化范围.

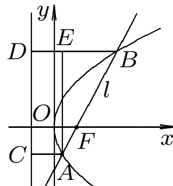


图 5

解: 设直线 l 的倾斜角为 α, 过 A、B 分别向准线作垂线, 垂足为 C、D, 过 A 向 BD 作垂线, 垂足为 E, 由 A、F、B 三点共线, $\therefore\ |\overrightarrow{FB}| = \lambda|\overrightarrow{AF}|$, 设 $|\overrightarrow{AF}| = m$, 则 $|\overrightarrow{FB}| = \lambda m$, 由抛物线定义, 有 $|FB| = |BD|$, $|FA| = |AC|$, $\therefore\ |BE| = |BD| - |AC| = \lambda m - m$, 又 $|AB| = \lambda m + m$, $\therefore\ \cos\alpha = \frac{|BE|}{|AB|} = \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}$, 易得 $\tan\alpha = \pm\frac{2\sqrt{\lambda}}{\lambda - 1}$.

直线 l 的方程为 $y = \pm\frac{2\sqrt{2}}{\lambda - 1}(x - 1)$. 由

$\dfrac{2\sqrt{\lambda}}{\lambda-1}=\dfrac{2}{\sqrt{\lambda}-\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}}$, 可知 $\dfrac{2\sqrt{\lambda}}{\lambda-1}$ 在 $[4,9]$ 上是递减的, 因此, $\dfrac{3}{4}\leqslant\dfrac{2\sqrt{\lambda}}{\lambda-1}\leqslant\dfrac{4}{3}$, 故直线 l 在 y 轴上截距的变化范围为 $\left[-\dfrac{4}{3},-\dfrac{3}{4}\right]\cup\left[\dfrac{3}{4},\dfrac{4}{3}\right]$.

评析: 本题常规方法是设两点坐标, 根据向量关系列方程组求解, 计算复杂. 而根据三点共线把向量关系转化为长度关系, 利用抛物线的定义巧妙求解. 处理圆锥曲线焦点弦问题的首选方法应是圆锥曲线的定义.

五、不求坐标求关系

例5　求椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$ 中以 $P(1,1)$ 为中点的弦所在直线的方程.

解: 设弦的端点 $A(x_1,y_1)$, 则另一端点为 $B(2-x_1,2-y_1)$. 所以 $\dfrac{x_1^2}{9}+\dfrac{y_1^2}{5}=1$, ①

$\dfrac{(2-x_1)^2}{9}+\dfrac{(2-y_1)^2}{5}=1$. ②

② − ① 得 $5x_1+9y_1-14=0$,

即 AB 方程为 $5x+9y-14=0$.

评析: 本题若设直线方程, 一方面计算较繁, 另一方面还需对斜率 k 进行讨论. 本题亦可通过设 A、B 两点坐标, 用作差法解决, 但应注意检验所求方程是否符合题意.

六、正难则反显奇效

例6　已知抛物线 $C: y^2=2px\,(p>0)$, 直线 l 过抛物线的焦点 F(直线 l 不与 x 轴重合). 证明抛物线 C 上不存在不同两点关于直线 l 对称.

解: 如图6, 假设抛物线 C 上存在两点 A、B 关于直线 l 对称, 连结 AF、BF, 过 A、B 分别作准线的垂线, 垂足为 M、N.

由抛物线定义, 有 $|AF|=|AM|$, $|BF|=|BN|$, 由点 A、B 关于直线 l 对称,

∴ 直线 l 垂直平分 AB, 即 $|AF|=|BF|$,

∴ $|AM|=|BN|$, 于是四边形 $AMNB$ 为矩形, 即 $AB\perp x$ 轴.

∴ 直线 l 与 x 轴重合, 这与已知矛盾. 故抛物线 C 上不存在不同两点关于直线 l 对称.

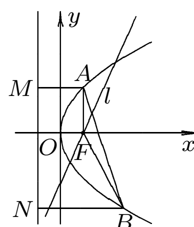


图 6

评析: 本题假设抛物线 C 上存在两点 A、B 关于直线 l 对称, 利用抛物线定义巧妙推出矛盾, 从而命题得证. 正面解决问题有难度时, 从反面考虑往往会有奇效.

(上接第5–29页)

因为点 P、M、N 三点共线, 所以 $k_{PN}=k_{PM}$, 即 $\dfrac{\dfrac{-5-3\lambda}{2}-\dfrac{21}{4}}{3+2\lambda-2}=\dfrac{\dfrac{2-\lambda}{1+\lambda}-\dfrac{21}{4}}{\dfrac{4+\lambda}{1+\lambda}-2}$,

化简得 $8\lambda^2+10\lambda-7=0$, 故 $\lambda_1=\dfrac{1}{2}$, $\lambda_2=-\dfrac{7}{4}$. 因为 $0\leqslant\lambda\leqslant1$, 所以 $\lambda=\dfrac{1}{2}$, 故 $M(3,1)$. 因此 $k_{PM}=\dfrac{\dfrac{21}{4}-1}{2-3}=-\dfrac{17}{4}$.

所以直线 l 的方程为 $y-1=-\dfrac{17}{4}(x-3)$, 即 $17x+4y-55=0$.

(2) 当 l 与 BA、CA 相交时.

假如 l 与 BA 的交点为点 M', 设 M' 分 $\overrightarrow{BA}$ 所成的比为 λ_1. 仿(1)做法得 $\lambda_1=\dfrac{1+\sqrt{126}}{5}$. 由于 $0\leqslant\lambda_1\leqslant1$, 所以过点 P 且平分 $\triangle ABC$ 面积的直线 l 不存在.

综上所述, 过点 P 且平分 $\triangle ABC$ 面积的直线 l 的方程为 $17x+4y-55=0$.

说明: (1) 引理都是从四边形到小三角形方向次序进行确定起点、终点; 定理结论若比较分子与分母可以看出很有规律. 这样就便于记忆、容易应用.

(2) 在研究过程中笔者发现引理与定理结论表示形式有很多,笔者用最简洁形式给出,体现了数学形式美.

明清之际《几何原本》后九卷内容的传播

250014 山东师范大学数学系 (上海交通大学科学史系在职博士) 杨泽忠

1583年, 意大利传教士利玛窦 (Matteo Ricci, 1552-1610)将他在罗马学院时期的老师克拉维乌斯 (C.Clavius, 1538-1612)神父编写的《几何原本十五卷》(Euclidis elementorum libri XV)带到了我国,1607年,他和我国数学家徐光启翻译了前六卷, 1857年, 英国人伟烈亚力 (A.Wylie, 1815-1887) 和我国数学家李善兰翻译了后九卷, 中间隔了整整250年. 这期间《几何原本》后九卷的情况是怎样的呢? 有没有其中的内容被介绍过来呢? 答案是: 有. 不仅有, 而且内容还不少. 下面笔者拟就这个问题作一阐述.

1608年, 李之藻在跟利玛窦学习数学一段时间之后, 写成了《圜容较义》一书. 此书共十八题, 主要论述了圆内接多边形和一些立体几何的性质. 此书第十四题为:"锐觚全形所容与锐顶至边垂线及三分底之一矩内直角立形等." 此题的解释是:"论曰: 从立形底诸角与相对一角如子角者皆作垂线, 以成庚辛壬癸子觚形. 此形与寅庚形同底同高, 又同巳甲锐觚之高, 既巳甲形兼庚辛壬癸子觚之三." 到这里, 作者用小字体注解说:"十二卷六注言: 两觚形同高者, 其所容之比例入其底. 底等亦等, 底倍亦倍."[1]

这里的"十二卷"是哪里的呢? 经查对, 正是《几何原本》中的第十二卷. 《几何原本》十二卷命题六现在翻译为:"以多边形为底且有等高的两个棱锥的比如同两底的比."[2] 当时国内仅有利玛窦带来的克拉维乌斯神父编写的《几何原本十五卷》, 因此, 李之藻必定参考了这个版本.

上面的内容之后接着是:"寅庚全形亦兼庚辛壬癸子觚之三." 小字体解释:"以同底同高故,在十二卷七系."[3] 查这里的内容, 与《几何原本》十二卷命题七内容也正相对. 《几何原本》十二卷命题七为:"任何一个以三角形为底的棱柱可以被分成以三角形为底的三个彼此相等的棱锥."[4]

此书第十五题为:"平面不拘几边, 其全体可容浑圆切形者, 设直角立形, 其底得本形三之一, 其高得圆半径即相等." 解答是:"有甲乙丙丁形, 内含戊己庚辛圆, 其心壬, 而外线甲乙切圆于戊." 这后面小字体解释为:"十一卷三题."[5] 我们查对《几何原本》第十一卷, 命题三为:"如果两个平面相交, 则它们的共同交迹是一条直线".[6] 仔细分析, 本书的命题是其一个特例, 是命题三一个推论.

此书第十六题为一个关于球的体积和立方体体积的题, 在此题的解答中, 有叙述说:"于庚辛壬丙内试作有法形勿切甲乙丙圆."[7] 之后还有叙述说:"于甲乙丙圆内作有法形不令切癸子丑."[8] 这两句话后面给出的小字体都是:"十二卷十七." 我们查《几何原本》十二卷命题十七, 其为:"一致两个同心球, 在大球内作内接多面体, 使它与小球面不相切."[9] 由此, 作者在这里介绍了这个命题.

此书十七题为一个关于圆的性质的题, 在此题的解答中有:"甲圆外试作与丙(一个多边形) 相似形." 这句话的后面小字体提示为:"十二卷".[10] 我们查阅《几何原本》十二卷, 其引用了其中命题二 —— "圆与圆之比如同直径上正方形之比." ——证明过程中作圆外相似形的子命题.[11]

此书十八题为关于球的体积的题, 在此题的解答中有两个小字体解释, 第一个为:"圆角形同底之比例, 若其高之比例. 在十二卷十四

题."[12] 第二个为:"圆角形同高之比例, 若其底之比例故也. 在十二卷十一题." [13] 查阅这里的内容, 与《几何原本》中命题十四和命题十一正对. 命题十四说:"有等底的圆锥或圆柱之比同它们的高之比."[14] 命题十一说:"等高的圆锥或圆柱之比如同它们的底的比."[15]

由上可看出,利玛窦当时给国人简单介绍了《几何原本》后九卷的一些内容.

1631 年, 意大利传教士罗雅谷 (Jacques Rho, 1593-1638) 在北京参与《崇祯历书》的编纂, 写成了《测量全义》十卷. 《测量全义》为后面的天体测量奠定基础, 主要讨论了各种几何图形的测量. 在其第四卷中, 给出了这样一个小命题:"以第一自乘又以乘第二, 其两方之比例亦若第三与第四." 后面的小字体解释为:"见几何七卷十七题."[16] 检查之, 此处命题正是《几何原本》第七卷命题十七:"如果一个数乘两个数得某两数, 则所得两数之比与被乘两数之比相同."[17]

第六卷中作者主要讨论了立体几何, 在这里作者说:"几何原本十二卷七增题曰: 两平行面之体或同高, 两体其比例为体与体若底与底, 但取同类相求, 以正高为据, 不论体势直与不直 ⋯⋯ 几何十二卷七题之系曰: 同底同高之角体与平行面体之比例, 若一与三." [18] 此两个命题显然是《几何原本》中的内容.

所以, 罗雅谷也介绍了《几何原本》后九卷中的内容.

1687 年, 法国传教士张诚 (Jean Francois Gerbillon, 1654-1707) 和白晋 (Joachim Bouvet, 1656-1730) 来到中国,不久他们即被召进北京给康熙讲授数学. 他们在教学时, 因为嫌徐光启和利玛窦翻译的《几何原本》前六卷复杂难懂, 于是另外翻译了由法国人巴蒂 (I.G. Pardies, 1636-1637) 编写的《几何原本》(Elements de Geometrie).他们在翻译的同时, 或者是紧随其后, 又写出了一本书叫《算法原本》. 《算法原本》后来被收入到《数理精蕴》中, 所以今天能看到. 但是这不是原来的全部内容. 根据中国科学院自然科学史研究所保存的李俨先生从故宫手抄出来的《算法原本》来看, 原书内容要丰富的多.

《算法原本》主要讨论的是什么呢? 现已有人作了研究:它主要讨论了整数数论; 它的内容来自于《几何原本》; 它其实是《几何原本》的第七卷.[19]

前段时间笔者也有幸看到了李俨先生的手抄本. 其共分 75 个部分, 第一部分主要讨论了整数的性质, 相当于定义. 从第二部分开始, 直到最后, 讨论的全是数论的内容. 但是, 该书不是对《几何原本》第七卷的直译, 是意译.

当时张诚和白晋他们为什么要翻译这本书, 也有人进行了研究, 认为是为了学习他们翻译的《几何原本》中的立体几何打基础的. 李善兰的几何原本序言中曾说:"(几何原本)卷七至卷九有比例无比例之理,卷十论无比例十三线, 卷十一至十三论体, 十四十五二卷亦论体, 则后人无续也. 无七八九三卷, 则十卷不能读. 无十卷, 则后三卷中论无体之边不能尽解. 是七卷以后皆为论体而作, 即皆论体也."

1700年左右, 著名数学家梅文鼎写了一本书叫《几何补编》, 其中提及了五种正多面体的性质.[20]在《几何补编》第一卷中, 他说:"凡等四面体, 以其边为斜线而求其方, 以作立方, 则此立方能容等四面体."

在第二卷中, 梅文鼎说:"立方内容二十边等边算法: 亢卯寅房为立方全径一百, 中寅中卯为半径五十, 寅卯二点为二十等面边折半之界, 寅卯线为二十等面边之半, 中为体之中心, 寅中卯角为三十六度. 中寅半径当理分中末之全数, 寅卯即理分中末之大分 ⋯⋯ 约法: 立方根与所容二十等面之边, 若全数与理分中末之大分 ⋯⋯ 若十二面, 边为理分中末线之小分, 求其全分, 为外切立方也."这就是说, 正二十面体的边长等于正方体边长黄金分割之大段长; 正十二面体边长等于正方体边长黄金分割之小段长.

在第三卷中, 梅文鼎说:"凡十二等面与二十等面可以互相容, 皆以内体之尖切外体之各面中心一点 ⋯⋯ 凡立方内容十二等面, 皆以

十二等面之边正切于立方各面之正中凡六, 皆遥对如十字. 假如上下两面所切十二等面之边横, 对前后两面所切之边必纵, 而左右两面所切之边又横. 若引其边为周线, 则六处皆成十字. 立方内容二十等面边亦同."

在第四卷中, 梅文鼎又说:"凡立方体各自其边之中, 半斜剖之, 得三角锥八, 此八者合之即同八等面体. 依前算, 八等面体其边如方其中高如方之斜, 若以斜径为立方, 则中含八等面体, 而其体积之比例为六与一. 何以言之? 如巳心辛为八等面体之中高, 庚心戊为八等面之腰广, 巳庚、巳戊、戊辛、辛庚则八等面体之边也. 若以庚辛戊腰广自乘, 为甲乙丙丁平面, 又以巳辛心中高乘之, 为甲乙丙丁立方, 则八等面之角俱正切于立方各面之正中, 而为立方内容八等面体矣, 夫巳心、辛庚、心戊皆八等面方之斜也, 故曰以其斜径为立方, 则中含八等面体也."

而上述说法与克拉维乌斯神父编写的《欧几里得几何原本十五卷》中第十五卷给出的正多面体的性质很多相似.在克拉维乌斯神父的书中给出了21个命题, 全部是作图题. 比如

第一个命题是: 在六面体中求作正四面体 (In dato Cubo Pyramidem escribere);

第三个命题是: 在正六面体中求正八面体 (In dato Cubo Octaedrum describere);

第五个命题是: 在正二十面体中求作正十二面体 (In dato Icosardro Dodecaedrum describere);

第七个命题是: 在正十二面体中求作正二十面体 (In dato Dodeaedro Icosardrum describere).[21]

在讨论这些图形如何作的时候, 作者推出了和上述相同的性质. 甚至有些话都是一样的. 比如, 在312页命题"In dato Cubo Dodecaedrum describere" 的阐述中有: Si latus cubi secetur extrema ac media ratione minus segmentum latus est dodecaedri in cubo descripti. (以正六面体边长黄金分割之后的小段为边长可在这个正六面体内作正十二面体.) 在315页命题" In dato Cubo Icosaedrum describere" 的阐述中有: Si latus cubi extrema ac media ratione secetur minus segmentum latus est icosaedri in cubo descripti. (以正六面体边长黄金分割之后的小段为边长可在这个正六面体内作正二十面体.)[22]

梅文鼎的这些知识从哪里来的?是不是当时有人翻译了《欧几里得几何原本十五卷》后面的内容? 这个问题我们认为并非完全不可以猜测. 毕竟当时在华的传教士很多, 还有梅文鼎探访知识的能力也很强.

综上所述, 在徐光启翻译《几何原本》前六卷之后和在李善兰翻译《几何原本》后九卷之前, 的确已有不少《几何原本》后九卷的内容早已被翻译了过来. 有的还被翻译过来马上应用到了数学研究和实践中. 所以, 纵观明清之际《几何原本》之东来, 其应该是一个循序渐进的和连续的过程, 不是间断的.

参考文献

[1]、[3]、[5]、[7]、[8]、[10]、[12]、[13] 李之藻. 圆容校义 [M]. 天学初函 [C]. 台湾学生书局影印本. 1965. 3472、3472、3473、3475、3477、3479、3481、3482.

[2]、[4]、[6]、[9]、[11]、[14]、[15]、[17] 欧几里得. 几何原本 [M]. 陕西科学技术出版社. 2003. 567、569、508、588、557、585、576、212.

[16]、[18] 徐光启. 新法算书 [C]. 四库全书 (789) [C]. 上海古籍出版社. 1983. 641、668.

[19] 韩琦. 康熙传入的西方数学及其对中国数学的影响(博士论文). 1991. 29–30.

[20] 梅文鼎. 几何补编 [M]. 四库全书 [C]. 上海古籍出版社. 1983.

[21] C. Clavius. Euclidis Elementorum libri XV [C]. Romae: Apud Vincentium Accoltum 1574. (Vol. 2) 225、305–324.

[22] Jean–Claude Martzloff. Recherches sur L'euvre mathematique de mei wending (1633– 1721) [M]. Paris: Collège de France, Institut des hautes études chinoises, 1981. 265–267.

编后漫笔

给中国的几何教学定位

张奠宙　赵小平

近日, ICMI的现任执行委员、香港大学梁贯成博士来上海访问. 他在演讲中提到, 我过去总是到“国际教育超市”里去挑选香港数学教育需要的“理论”, 然而从TIMSS的国际调查看, 东亚地区(包括香港)的数学成绩却总是名列前茅. 因此, 最近几年, 我觉得要多多认识自己的长处和弱点, 认真给香港的数学教育定位, 不要老是跟着别人跑.

这番话不仅适合于香港, 也适合于中国大陆的数学教育. 最近, 关于初中平面几何的教学, 又有不少争论. 为了中华民族的未来, 几何学的改革牵动着人们的心. 由梁先生的演讲想到, 我们在寻求答案的时候, 恐怕也得首先给“中国的几何教学”定位.

本期开设了“几何教学改革”的专栏. 其中有几何教学改革的历史追寻, 也有国际视野的介绍, 包括我们自己的思考. 不管怎么说, 中国几何教学是我们的强项之一.

改革是非常艰难的. 有争论是好事, 真理越辩越明. 我们希望不仅摆观点, 也能够开药方, 以便找到适合中国国情的几何教学改革的方向和途径.

数学教学
SHU XUE JIAO XUE
2005年第5期
(总第212期)
主编: 张奠宙　赵小平
常务副主编: 忻重义
电　话: 021–62232712

主办单位: 华东师范大学
出　　版: 《数学教学》编辑部
邮政编码: 200062(上海中山北路3663号)
广告许可证: 沪工商广字07017号
印　　刷: 华东师范大学印刷厂
国内总发行: 上海市邮政局报刊发行局
国内订阅: 全国各邮电局
电子信箱: sxjxzz@math. ecnu. edu. cn

定价: 3.80元　国内统一刊号: CN31–1024/G4　每月12日出版　代号: 4–357